

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING

WIEN

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN
GRAZ

9. BAND 1. HEFT

MIT 44 ABBILDUNGEN UND 2 TAFELN
(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1954)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1954

Acta Phys. Austr.

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mülkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mülkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

9. Band/1. Heft. Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Haefer R. Über dünne aus Methan in der selbständigen elektrischen Hochvakuum- umentladung gebildete Schichten.	1
Tomiser J. Eigendruckverbreiterung der Rubidiumlinien $\lambda = 7800,23 \text{ \AA}$ und $\lambda = 7947,60 \text{ \AA}$ und ihrer ZEEMANKomponenten in Absorption	18
Harmuth H. Ein statisches Verfahren zur Lösung der LAPLACESchen Differen- tialgleichung durch elektronische Rechenmaschinen	27
Grümm H. und J. Wagner. Die Deformation von Elektronen-Beugungsringen durch Linsenfehler	33
Glaser W. und G. Braun. Zur wellenmechanischen Theorie der elektronen- optischen Abbildung I.	41
Sexl Th. Über eine Eigenschaft der POISEUILLESchen Strömung	75
Buchbesprechungen	77

1127 m

Über dünne aus Methan in der selbständigen elektrischen Hochvakuumladung gebildete Schichten.

Von

R. Haefer, Graz.

Mit 14 Abbildungen.

(Eingelangt am 4. Februar 1954.)

Zusammenfassung.

Es werden eine neue Methode zur Erzeugung dünner Schichten mit Hilfe der in vorangehenden Arbeiten [2, 3, 4] studierten selbständigen elektrischen Hochvakuumladung im transversalen Magnetfeld beschrieben und die bei der Zersetzung von Methan in dieser Entladung erhaltenen Ergebnisse mitgeteilt. Die auf der Anode pro Zeit- und Flächeneinheit abgeschiedene Menge m Kohlenstoff ist im Bereich 10^{-4} bis 10^{-3} Torr unabhängig vom Druck und von der magnetischen Induktion; sie ist nur von der Spannung U am Rohr und der Stromdichte i an der Anode abhängig. Es ist $m = F(U) \cdot i$, wobei die Ausbeutefunktion $F(U)$ außer von U noch von der Art des Füllgases abhängt. Die Messung der Massen- und der Schichtdicke erfolgt mit dem Übermikroskop. Als Grundlage hierfür dient die Gradationskurve für Hellfeld und Kernstrahl, die für 80 kV Strahlspannung experimentell ermittelt und in Übereinstimmung mit der von BORRIESSCHEN Theorie [1] gefunden wird. Anwendungen der Ergebnisse auf die Erzeugung von Abdrücken für die übermikroskopische Präparationstechnik werden beschrieben. Dabei wird eine Wiedergabetreue von 3 $m\mu$ erreicht.

I. Einleitung.

Bei elektrischen Gasentladungen treten in allen bisher untersuchten Druckbereichen (0,1 bis zu einigen 1000 Torr) eine Reihe von Nebenerscheinungen auf: 1. Kathodenzerstäubung, und ferner beim Arbeiten mit nicht edlen Gasen 2. chemische Reaktionen zwischen Füllgas und Elektrodenmaterial (elektrochemische Zerstäubung [7, 8]) und 3. chemische Umsetzungen des Füllgases infolge Ionen- oder Elektronenstoß [11]. Diese Erscheinungen sind bisher hauptsächlich in der Glimmentladung untersucht und für mannigfaltige Anwendungen herangezogen worden. Von diesen Anwendungen soll uns gegenwärtig nur die Entstehung dünner Schichten interessieren und diese wiederum nur insoweit, wie sie durch chemische Umsetzungen des Füllgases bewirkt wird. Läßt man nach KÖNIG [11] eine Glimmentladung in einer Atmosphäre aus Kohlenwasserstoffen (z. B. C_6H_6) brennen, so scheiden sich

auf den Elektroden, bzw. den darauf ruhenden Auffängern gleichmäßige feste Schichten aus einem Kohlenwasserstoffpolymerisat ab, das durch anschließendes Erwärmen oder durch Elektronenbeschuß infolge Dehydrierung in eine thermisch, chemisch und mechanisch äußerst widerstandsfähige Kohlenstoffschicht umgewandelt werden kann. Die so hergestellten Kohlenstoffschichten haben sich z. B. in der übermikroskopischen Präparationstechnik hervorragend bewährt [12]. Nach KÖNIG ist die Entstehung der Schichten folgendermaßen zu verstehen: Die Kohlenwasserstoffmoleküle werden, wie spektroskopische [13] und massenspektrographische Untersuchungen [14] zeigen, durch Elektronen- oder Ionenstoß teils nur ionisiert, teils in geladene oder ungeladene Bruchstücke gespalten. Man erhält z. B. schon bei dem einfachsten Kohlenwasserstoff Methan eine große Anzahl von Abbauprodukten (CH_3^+ , CH_2^+ , CH^+ , C^+ und H^+). Neben diesen Abbauprodukten beobachtet man auch eine große Anzahl von Aufbauprodukten, die sich durch ein- oder mehrfache Zusammenstöße der Abbauprodukte bilden. Beim Methan kommen z. B. Massen von 24 bis 30 (C_2^+ bis C_2H_6^+) und von 36 bis 44 (C_3^+ bis C_3H_8^+) vor. Noch mannigfaltiger ist die Anzahl der bei der Zersetzung von Benzol vorkommenden Abbau- und Aufbauprodukte, da die Zahl der möglichen Spalt- und Aufbauprozesse hier wesentlich größer ist als bei CH_4 . Da die entstehenden freien Radikale eine außerordentliche Neigung besitzen, sich zu höher molekularen Verbindungen zusammenzusetzen, bestehen die gebildeten Filme aus Polymerisaten dieser Radikale. Ihre Bruttoformel ist $(\text{C}_{10}\text{H}_8)_x$, falls die Schicht aus C_6H_6 in der Glimmentladung entsteht. Infolge des hohen Wasserstoffgehaltes haben die aus C_6H_6 erhaltenen Filme eine z. B. für übermikroskopische Abdruckverfahren vielfach noch zu geringe mechanische Festigkeit. Um ihnen die erforderliche Festigkeit zu geben, werden sie, wie erwähnt, einer Elektronenbestrahlung unterzogen. Es bleibt dann ein reiner Kohlenstofffilm übrig, wie KÖNIG [10] durch Beugungsaufnahmen nachweisen konnte.

Um das nach Aufbringen des Films auf übermikroskopische Objekte beim Arbeiten mit C_6H_6 notwendige Dehydrieren zu vermeiden, schlug GRASENICK [6] die Verwendung von Methan vor. Da nämlich beim Methan die entstehenden Radikale niedriger molekular sind, als beim C_6H_6 , ist bei CH_4 ein mechanisch festerer Film zu erwarten als bei C_6H_6 . In der Tat erweisen sich die mit CH_4 nach dem Glimmentladungsverfahren von KÖNIG erhaltenen Schichten als mechanisch so fest, daß sie ohne nachträgliche Elektronenbestrahlung für übermikroskopische Abdruckverfahren benutzt werden können [6].

Ein weiterer Schritt, die Bildung von Polymerisaten — und zwar soweit diese schon in der Gasphase erfolgt, hintanzuhalten, ist das Arbeiten im Hochvakuum. Als dem Hochvakuumbereich zugehörig sollen dabei, wie es konventionellerweise üblich ist, Drucke $\leq 10^{-3}$ Torr angesehen werden. In diesem Fall ist im allgemeinen die mittlere freie Weglänge der Moleküle größer als die Abmessungen des Entladungsraumes und somit die Rekombinationswahrscheinlichkeit der Radikale

im Entladungsraum sehr gering. Ein anderer Grund für das Arbeiten im Hochvakuum ist experimenteller Natur. Der Verbrauch an Füllgas ist bei 10^{-3} Torr einige 100 mal kleiner als bei einem Druck von einigen $1/10$ Torr, wie er in der Glimmentladung erforderlich ist. Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn es sich um Gase handelt, die schwierig oder in nur geringen Mengen herstellbar sind.

Das Arbeiten im Hochvakuum kann nun praktisch in zweierlei Weise verwirklicht werden: 1. Durch Verwendung einer Glühkathode, wobei die emittierten Elektronen den auf der Anode gelegenen Auffänger treffen. Dieser Vorgang spielt z. B. im Übermikroskop eine Rolle, da der Vakuumraum infolge der Fettdichtungen Kohlenwasserstoffe enthält [9]. 2. Durch die selbständige Hochvakuumentladung unter Verwendung eines zum elektrischen Feld transversal gerichteten Magnetfeldes. Mit Hilfe dieser in vorangegangenen Arbeiten des Verfassers [2, 3, 4] auf ihre Eigenschaften der Zündung und der Stromspannungscharakteristiken untersuchten Form der elektrischen Entladung gelingt es, dünne Schichten sowohl durch Kathodenzerstäubung wie durch elektrochemische Zerstäubung oder Zersetzung des Füllgases zu erzeugen. In der vorliegenden Arbeit soll eine hierfür geeignete Apparatur beschrieben und die Entstehung dünner Schichten zunächst nur durch Zersetzung des Füllgases untersucht werden. Die Eigenschaften dieser Schichten erweisen sich unter anderem als von der Art des Füllgases und dem Ort des Auffängers abhängig. In der gegenwärtigen Untersuchung wird Methan als Füllgas verwendet und der Auffänger befindet sich auf der Anode. Unter diesen Gegebenheiten soll das Gesetz des Schichtenwachstums ermittelt und die Eignung der erhaltenen Schichten für die übermikroskopische Präparationstechnik studiert werden.

II. Versuchsanordnung.

Die selbständige Entladung im Hochvakuum betreibt man zweckmäßigerweise in einer zylindrischen Elektrodenanordnung, die zur Vermeidung von Trägerverlusten durch seitliche Endflächen verschlossen

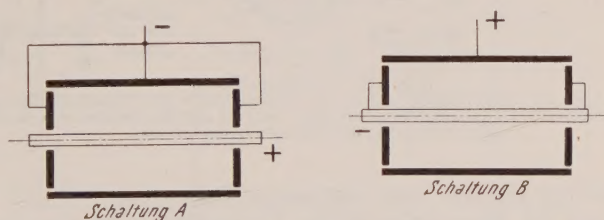


Abb. 1. Die beiden Schaltmöglichkeiten zum Betreiben der selbständigen Hochvakuumentladung. Das Magnetfeld ist axial gerichtet.

ist [15, 3]. Das Magnetfeld ist konaxial zu den Elektroden gerichtet. Die Elektroden lassen sich nun auf zwei Arten schalten [15] (Abb. 1): Bei Schaltung A bilden der äußere Zylinder und die beiden Endflächen die Kathode und der innere Zylinder die Anode. Bei Schaltung B

ist der äußere Zylinder die Anode und die Endflächen sind gemeinsam mit dem Innenzylinder die Kathode. Der Innenzylinder nimmt gegenüber den übrigen Elektroden aus zwei Gründen eine Sonderstellung ein. Erstens ist an ihm bei geeigneter Dimensionierung der Anordnung die Stromdichte am größten, was für ein rasches Schichtenwachstum günstig ist. Zweitens ist die Zufuhr an Substanz beim Innenzylinder weit gleichmäßiger über die verschiedenen Raumrichtungen verteilt als bei den übrigen Elektroden. Dieser Umstand ist für die Umhüllung über-

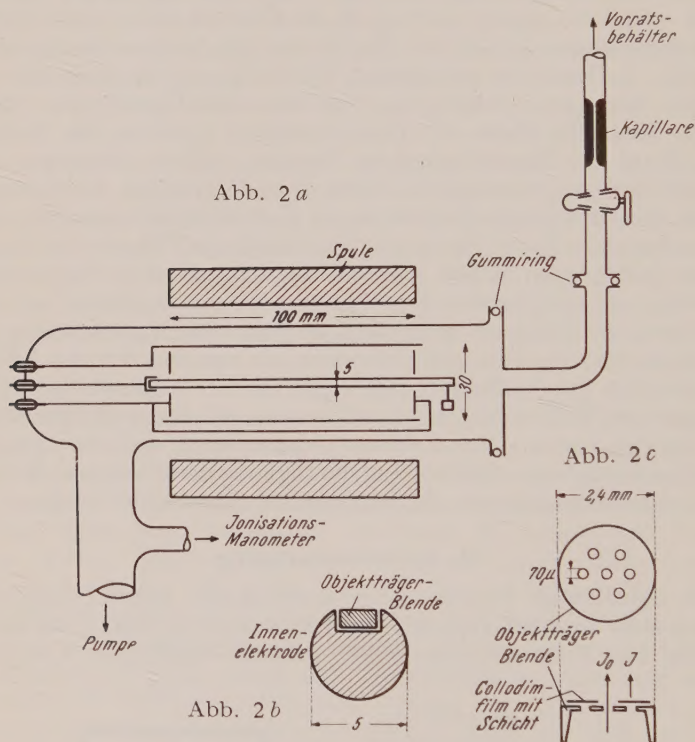


Abb. 2 a. Versuchsanordnung.

Abb. 2 b. Lage der Objektträgerblenden auf der Innenelektrode der Versuchsanordnung Abb. 2 a.

Abb. 2 c. 7-Loch-Blende des Siemens-Übermikroskops. Der Film über der zentralen Bohrung ist zum Zwecke der Bestimmung der Massendicke durchstoßen.

mikroskopischer Objekte von besonderer Bedeutung. Es ist daher in Hinblick auf die Anwendung in der Übermikroskopie zweckmäßig, die Auffänger für die entstehenden Schichten auf dem Innenzylinder anzuordnen. Je nachdem, ob nun die auf der Anode oder auf der Kathode sich bildenden Schichten untersucht werden sollen, wird man Schaltung A oder Schaltung B benutzen. In der vorliegenden Mitteilung beschränken wir uns auf die auf der Anode entstehenden Schichten, das heißt es wird nur Schaltung A verwendet.

Die Abmessungen des benützten Elektrodensystems zeigt Abb. 2 a. Der äußere Zylinder ist seiner Länge nach und die Endflächen sind längs eines Durchmessers geschlitzt. Dies hat den Zweck, einerseits den Druckausgleich zu ermöglichen und andererseits die Ausbildung von Wirbelströmen zu behindern für den Fall, daß ein magnetisches Wechselfeld verwendet wird. Äußerer Zylinder und Endflächen sind mit vakuumgeschmolzenem Molybdänblech ausgekleidet, das die Störeffekte der Gasabgabe und -aufzehrung in weit geringerem Maße als andere sonst vielfach bei Gasentladungen verwendete Materialien wie z. B. Al, Fe, Ni zeigt. Nach längerem Betrieb ist eine Reinigung der Elektroden erforderlich, um zu verhindern, daß größere Partikel auf die Auffänger fallen.

Als Auffänger für die Schicht dienen die zum Siemens-Übermikroskop nach E. RUSKA und B. VON BORRIES gehörigen Objektträger aus einer Gold-Platinlegierung, die mit einer Collodiumfolie über-

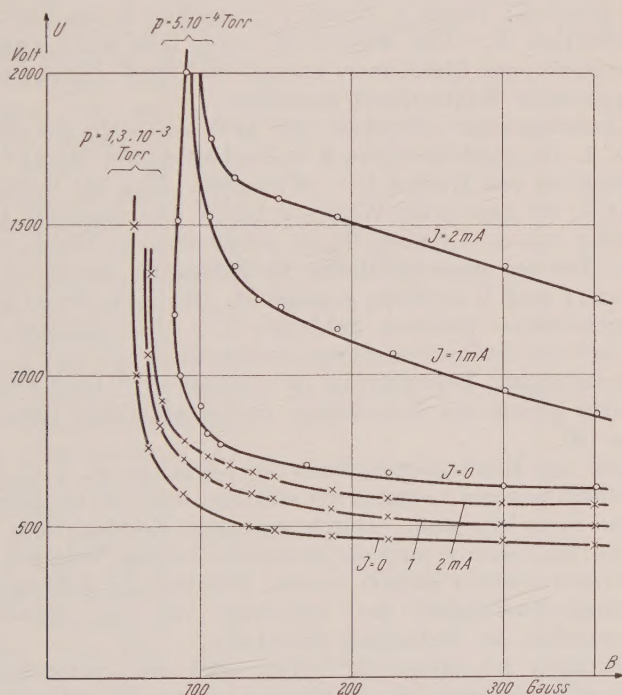


Abb. 3. $U - B$ -Kennlinien der Anordnung Abb. 2 a bei verschiedenen Drucken und verschiedenen Strömen. Schaltung A, Methan.

spannt sind. Diese Objektträger sind in einer Längsrille des Innenzylinders derart untergebracht, daß die Collodiumfolie gerade mit dem Rillenrand abschneidet (Abb. 2 b). Der Innenzylinder ruht isoliert in

Keramikteilen. Seine Lage ist durch ein kleines Gewicht außerhalb des Entladungsraumes fixiert, so daß Drehbewegungen und damit ein Herunterfallen der Objektträger vermieden werden.

Das Elektrodensystem befindet sich in einem Glasrohr, über das die Spule zur Erzeugung des Magnetfeldes geschoben ist. An dem einen Ende des Glasgefäßes wird das Füllgas (Methan) aus einem Vorratsbehälter über eine Kapillare zugeleitet; am anderen Ende ist über eine Falle für flüssige Luft eine dreistufige Hg-Diffusionspumpe angeschlossen. Die Druckmessung geschieht mit einem Kaltkathodenmanometer [5], das für die benutzten Gase mit einem MAC-LEOD-Manometer geeicht wird. Die Verwendung von Planschliffen mit Gummiringdichtungen ermöglicht ein rasches Öffnen, bzw. Schließen der Apparatur. Vor Beginn des Versuches wird im Entladungsraum ein Druck unterhalb 10^{-5} Torr hergestellt. Dann läßt man das Gas einströmen und nimmt die Entladung in Betrieb. Während der Dauer des Versuches werden die folgenden, die Entladung bestimmenden Daten konstant gehalten: Druck p , Strom I , Spannung U am Rohr, magnetische Induktion B . Das Magnetfeld wird, falls nicht ausdrücklich anders vermerkt, mit Gleichstrom erzeugt und für B der in der Spulenmitte herrschende Maximalwert angegeben.

Den Zusammenhang zwischen den vier Variablen der Entladung zeigt Abb. 3. Bei gegebenem Druck ist ein bestimmter Strom I bei einer Mannigfaltigkeit von Werten $U - B$ möglich. Man hat es daher z. B. in der Hand, bei gegebenen Werten p und I die Spannung U in verhältnismäßig weiten Grenzen durch entsprechende Wahl von B zu variieren. Bei der magnetfeldfreien Entladung ist dies nicht möglich, da mit p und I auch U eindeutig gegeben ist. Die Schar der zu $p = \text{const.}$, aber verschiedenen Strömen gehörigen $U - B$ -Kennlinien läßt erkennen, daß die Strom-Spannungscharakteristik (B und $p = \text{const.}$) in dem untersuchten Druckbereich ($p < \text{einige } 10^{-3}$ Torr) steigend ist. Dies ist aber gerade das Kennzeichen der selbständigen Hochvakuum-entladung [4].

Von den vier Bestimmungsgrößen der Entladung p , I , U , B sind je zwei innerhalb gewisser Grenzen frei wählbar, während die übrigen zwei durch jene festgelegt sind. Durch geeignete Kombination von Versuchsreihen, bei denen je zwei der genannten Größen konstant gehalten und die beiden anderen variiert werden, läßt sich die Abhängigkeit der Wachstumsgeschwindigkeit der Schichten von den einzelnen Bestimmungsgrößen der Entladung ermitteln.

Bei Drucken $p > \text{einige } 10^{-3}$ Torr sind die Strom-Spannungscharakteristiken fallend; die Entladung nimmt den Charakter einer Glimmentladung an. Außerdem beobachtet man im Glimmentladungsbereich auf der Kathode eine bedeutend stärkere Abscheidung von Schichten als im Hochvakuumbereich. Von diesen Schichten, die eine pulverförmige Struktur zeigen, können einzelne Partikel auf die Auffänger auf der Anode fallen, wodurch unbrauchbare Ergebnisse erzielt werden. Dieses Verhalten entspricht völlig den bei der Verwendung von

CH_4 in der magnetfeldfreien Entladung gemachten Beobachtungen [6].

Die *Massendicke* (Dichte $\times$ Dicke, g/cm^2) kann sehr bequem mit Hilfe des Übermikroskops gemessen werden, indem man bei sehr kleiner Objektivapertur ($6 \cdot 10^{-3}$) das Verhältnis der Strahlstromstärke I nach der Streuung in der Schicht zur Stromstärke I_0 des nicht gestreuten Elektronenstrahls unter sonst gleichen Bedingungen bestimmt. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Massendicken und der genannten Objektivapertur gilt nach von BORRIES [1]

$$J = J_0 e^{-\frac{\gamma x}{\gamma x'}}, \quad (1)$$

wobei die Aufhellungsdicke

$$\gamma x' = 1,86 \cdot 10^{-10} \frac{A \cdot U}{Z^{4/3}} \frac{1 + \frac{U}{1,022 \cdot 10^6}}{\left(1 + \frac{U}{5,11 \cdot 10^5}\right)^2} \quad (2)$$

ist (γ = Dichte in g/cm^3 , A = Atomgewicht, Z = Ordnungszahl, U = Strahlspannung in Volt).

Die Messung des Verhältnisses I/I_0 gestaltet sich besonders einfach, wenn man 7-Lochblenden als Aufhänger benutzt und die Folie bei einer der 7 Bohrungen mit einer feinen, im Mikromanipulator eingespannten Spitze durchsticht (Abb. 2 c). Durch Verschieben der 7-Lochblende mit Hilfe der Objektstischverschiebung kann der Elektronenstrahl entweder die freie Bohrung oder eine der sechs anderen, mit der Schicht belegten Bohrungen durchsetzen. Das Objektiv wird so eingestellt, daß man ein scharfes Bild auf dem Leuchtschirm erhält. Man kann dann gleichzeitig

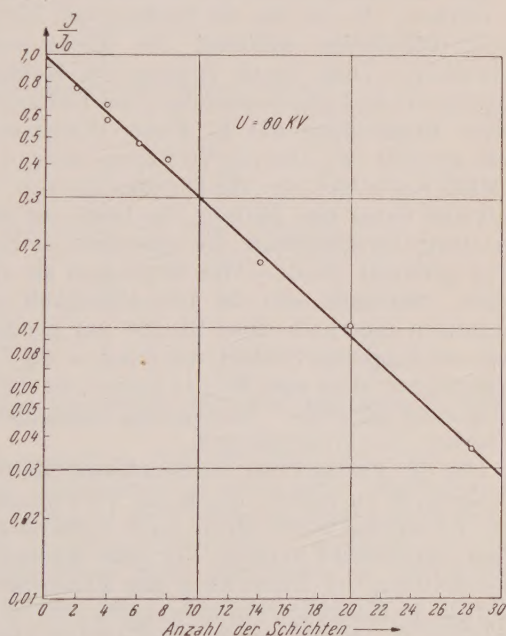


Abb. 4. Durchlässigkeit I/I_0 von 80 kV-Elektronen in Abhängigkeit von der Dicke der Collodiumfolien (willkürliche Einheiten) bei geringer Objektivapertur ($a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$).

die Gleichmäßigkeit der Schicht kontrollieren und zu Fehlmessungen führende Objektstellen wie Löcher, Risse, Blasen im Collodiumfilm oder Verunreinigungen vermeiden. Die Messung der Strahlstromstärke

(10^{-12} bis 10^{-13} A) erfolgt dadurch, daß der zu dem gut isoliert aufgebauten Leuchtschirm gelangende Strom über einen Hochohmwiderstand ($10^{19} \Omega$) zur Erde geleitet und der Spannungsabfall an diesem Widerstand mit einer Elektrometerröhre bestimmt wird. Dabei wird in einer Kompensationsschaltung die Anodenstromänderung dieser Röhre gemessen, die der Stromstärke am Leuchtschirm proportional ist. Da es in unserem Fall nur auf das Verhältnis I/I_0 ankommt, kann der Einfluß der Sekundäremission am Leuchtschirm unberücksichtigt bleiben. Die Genauigkeit der Messung I/I_0 ist durch nicht zu vermeidende zeitliche Schwankungen in der Stromanzeige gegeben, die durch Änderung der Emission der Elektrometerröhre (Oxydkathode), durch Erwärmung der Widerstände im Anoden- und Gitterkreis und durch Änderung der Batteriespannung verursacht sein können. Im Bereich der mitgeteilten Messungen beträgt die Unsicherheit einer Einzelmessung von I/I_0 2%. Das Verhältnis I/I_0 hängt von der Geschwindigkeit des Elektronenstrahls ab; es wurde stets bei $U = 80$ kV gearbeitet.

Auf die Möglichkeit einer besonderen Fehlerquelle ist noch Bedacht zu nehmen. Es ist dies die Bildung von Kohlenstoffschichten auf den Objektträgerfolien während der Elektronenbestrahlung im Übermikroskop. Diese durch Spuren von Kohlenwasserstoffen aus Dichtungsfetten und gegebenenfalls dem Treibmittel der Pumpe hervorgerufene Erscheinung hat in älteren Untersuchungen eine bedeutende Rolle gespielt [9]. Das zur Verfügung stehende Siemens-Übermikroskop Ü M100 hat jedoch eine Hg-Diffusionspumpe und eine Falle für flüssige Luft und ferner eine fettlose, das heißt nur mit Gummiringdichtungen versehene Objektschleuse, die außerdem vor Beginn der Messungen sorgfältig gereinigt wurde. Wie Messungen an unbelegten Collodiumfolien zeigen, verringert sich die Durchlässigkeit unter den gewählten Bedingungen innerhalb einer Stunde um maximal 5%. Das entspricht einer entstandenen Schicht von nur 5×10^{-7} g/cm²h. Da eine einzelne Messung nur etwa eine Minute dauert, ist der Einfluß der Kohlenstoffanlagerung gegenüber der ohnehin vorhandenen, oben genannten Unsicherheit zu vernachlässigen.

Um die Eignung der beschriebenen Methode zur Bestimmung der Massendicke zu prüfen, wurde ein Vorversuch ausgeführt, bei dem auf eine 7-Lochblende der Reihe nach Collodiumfilme in reproduzierbarer Weise aufgebracht werden. Vor jeder Messung hat man dabei den Film eine Zeitlang der Einwirkung des Elektronenstrahls auszusetzen, um die Folie in Kohlenstoff umzuwandeln [10], so daß man stets die gleiche stoffliche Beschaffenheit der Schicht hat. Das Ergebnis Abb. 4 zeigt, daß die Methode auf alle Fälle bis zu solchen Massendicken brauchbar ist, bei denen die Durchlässigkeit einige Prozent beträgt. Das ist aber der in der übermikroskopischen Präparationstechnik interessierende Bereich der Massendicken.

Die Durchlässigkeit I/I_0 der Schicht allein erhält man dadurch, daß man die mit Schicht gemessene Durchlässigkeit durch diejenige der

leeren Folie (etwa 0,90) dividiert. Bestimmt man durch Wägung noch die zugehörigen Werte der Massendicke, so erhält man als Zusammenhang zwischen Durchlässigkeit und Massendicke die *Gradationskurve*, und zwar in unserem Fall diejenige für das Hellfeld bei Verwendung des Kernstrahls [1].

Um eine für die Wägung ausreichende Substanzmenge zur Verfügung zu haben, läßt man auf einen der Stabanode eng anliegenden kurzen Platinzylinder eine Schicht unter definierten Bedingungen der Entladung eine hinreichend lange Zeit aufwachsen. Man macht dann bei der Umrechnung auf die Massendicke der Objektträgerblenden von der

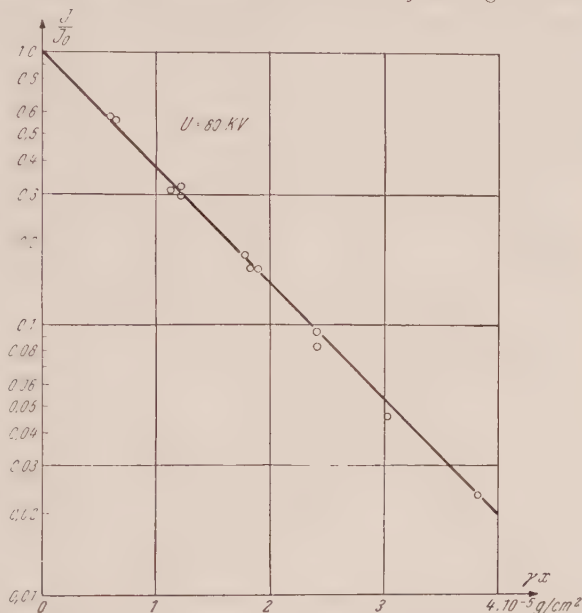


Abb. 5. Gradationskurve für Hellfeld und Kernstrahl für Kohlenstoff bei Strahlspannung $U = 80 \text{ kV}$ und Objektivapertur $a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$.

experimentell zuvor sichergestellten Tatsache Gebrauch, daß die pro Zeiteinheit abgeschiedene Substanzmenge unter sonst gegebenen Bedingungen konstant ist. Ferner ist die Verteilung der Massendicke über die Anode (Abschnitt III, 2) zu berücksichtigen. Vor der Wägung wird die Schicht noch der Bestrahlung durch Elektronen im Endbildtubus des Übermikroskops ausgesetzt, um zu erreichen, daß die zur Wägung kommende Schicht in der gleichen Weise zu Kohlenstoff dehydriert ist wie diejenigen Schichten, an denen die Durchlässigkeit I/I_0 bestimmt wird. Die Wägung erfolgt mit Hilfe der Mikro-Torsions-Schnellwaage nach G. GORBACH¹ [18]. Die Bestimmungen der Massendicke sind auf $\pm 10\%$ reproduzierbar.

¹ Herrn Prof. Dr. G. GORBACH sei auch an dieser Stelle für die Freundlichkeit gedankt, seine Mikrowaage zur Verfügung zu stellen.

III. Meßergebnisse.

1. Gradationskurve.

Eine für $U = 80$ kV gemessene Gradationskurve (für Hellfeld und Kernstrahl) zeigt Abb. 5. Aus derartigen Messungen ergeben sich für die Aufhellungsdicke ($I/I_0 = e^{-1} = 0,368$) Werte zwischen 1,1 und $1,3 \cdot 10^{-5}$ g/cm². Andererseits errechnet man aus Gl. (2) für Kohlenstoff mit $Z = 6$, $A = 12$ und $U = 80$ kV: $\gamma x' = 1,32 \cdot 10^{-5}$ g/cm². Die von BORRIESsche Theorie ist somit in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Auf Grund der Gradationskurve kann man jetzt aus der gemessenen Durchlässigkeit auf die Massendicke der Schicht schließen.

2. Verteilung der Massendicke über die Anode.

Diesen für die praktische Anwendung wichtigen Zusammenhang zeigt Abb. 6 für die Betriebsdaten $p = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Torr, $I = 2$ mA,

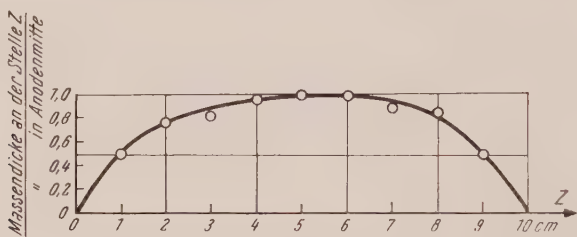


Abb. 6. Verteilung der Massendicke über die Anode bei Anordnung Abb. 2 a und Schaltung A. Füllgas CH_4 , $p = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Torr, $I = 2$ mA, $U = 590$ V.

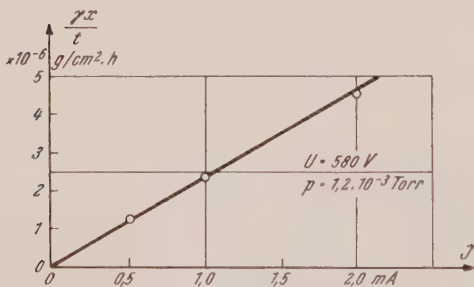


Abb. 7. Pro Stunde auf der Anode abgeschiedene Massendicke in Abhängigkeit von der Stromstärke. CH_4 , $p = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Torr, $U = 580$ V.

$U = 590$ V, $B = 240$ Gauß. Diese Verteilung der Massendicke entspricht offenbar im Einklang mit den Ergebnissen der folgenden Abschnitte der Verteilung der Stromdichte über die Anode. Zur Untersuchung des Schichtwachstums können daher nur Messungen miteinander verglichen werden, die sich auf den gleichen Ort auf der

Anode beziehen. Aus der Verteilungskurve erkennt man, daß für übermikroskopische Präparationsarbeiten nur die Strecke zwischen den Marken 2 und 8 cm auf der Anode, also 60% der Gesamtlänge ausgenutzt werden kann. Auf dieser Strecke können jedoch 24 Objektträgerblenden untergebracht werden.

3. Einfluß der Stromstärke.

Die pro Zeiteinheit abgeschiedene Massendicke ist bei gegebenen Werten von p und U der Stromstärke I proportional (Abb. 7). Ein Einfluß der zur Änderung der Stromstärke notwendigen Änderung der magnetischen Induktion B ist nicht erkennbar. Wenn auch Versuche bei verschiedenen Anodenradien noch nicht ausgeführt sind, so geht man wohl nicht fehl in der Annahme, daß die pro sec erzeugte Massendicke bei konstantem p und U der Stromdichte i an der Anode proportional ist.

4. Einfluß von Druck und magnetischer Induktion.

Versuche bei verschiedenen Drucken im Bereich $4 \cdot 10^{-4}$ bis einige 10^{-3} Torr zeigen, daß bei konstantem I und U die pro sec und cm^2 abgeschiedene Substanzmenge unabhängig ist sowohl vom Druck p wie von der magnetischen Induktion B (Abb. 8 a und b). Die Unab-

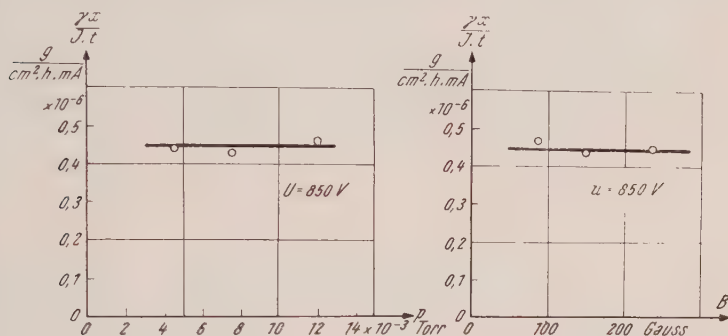


Abb. 8. Pro Stunde und mA Stromstärke auf der Anode abgeschiedene Massendicke in Abhängigkeit von a) dem Druck, b) der magnetischen Induktion. CH_4 . $U = 850 \text{ V}$.

hängigkeit der Wachstumsgeschwindigkeit von B ergibt sich auch aus Versuchen bei konstantem p und konstanten Werten I und U (horizontaler Ast der $U - B$ -Kennlinie).

5. Einfluß der Spannung.

Von ganz erheblichem Einfluß auf das Schichtenwachstum ist hingegen die Spannung U am Entladungsrohr (Abb. 9). Daher ist es zur Erzielung reproduzierbarer Ergebnisse vor allem wichtig, auf Konstanz der Spannung zu achten. Die pro Amperesekunde abgeschiedene Substanzmenge, die wir als Ausbeute $F(U)$ bezeichnen wollen, ist bei 1000 V nur noch 1/15 des Wertes, den sie bei 330 Volt hat. Die in der Zeit t bei der Stromdichte i an der Anode auf der letzteren pro cm^2 abgeschiedene Substanzmenge m ist dann

$$m = F(U) \cdot i \cdot t \quad (3)$$

Die Ausbeute $F(U)$ hängt nur von der Spannung U am Rohr und der Art des Füllgases ab.

Versuche bei Spannungen unterhalb 300 V lassen sich nicht ausführen, ohne daß der Druck auf 10^{-2} Torr und höher gesteigert wird. In diesem Fall ändert sich aber der Charakter der ganzen Erscheinungen, weil man es dann, wie oben dargelegt, nicht mehr mit der Hochvakuumentladung, sondern mit der Glimmentladung zu tun hat. Ergänzende Versuche insbesondere bei niedrigen Spannungen müßte man in der Weise ausführen, daß man eine Glühkathode in die Anordnung einbaut und die Entladung unselbständig betreibt.

Da nun bei einer Anodenspannung gleich der Ionisierungsspannung des Methans (15 V) die abgeschiedene Substanzmenge sicher Null ist,

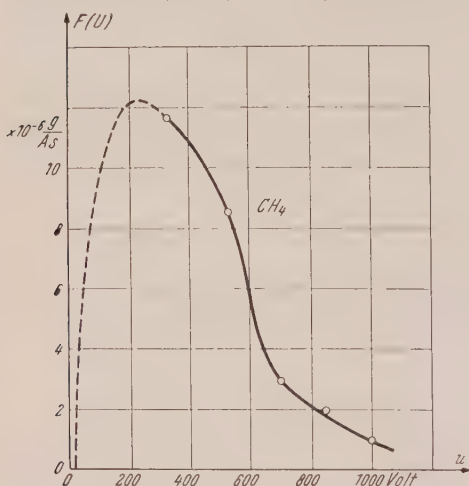


Abb. 9. Ausbeute $F(U)$ für Schichtenabscheidung an der Anode und Methan als Füllgas. Strichliert Teil hypothetisch.

dürfte die Ausbeute bei niedrigen Spannungen qualitativ den in Abb. 9 strichliert gezeichneten Verlauf haben. Der Charakter dieser Ausbeutekurve ist dann derjenige, den auch z. B. die Kurven der differentialen Ionisierung durch Elektronenstrahlen in Gasen haben. Die Kurven der differentialen Ionisierung durch Ionenstrahlen in Gasen haben in dem hier vorliegenden Geschwindigkeitsbereich hingegen einen mit der Voltgeschwindigkeit der Ionen monoton ansteigenden Verlauf. Dies

ist ein Hinweis darauf, daß Ionisierungs- und Spaltprozesse durch *Elektronen* eine entscheidende Rolle bei der Schichtenbildung auf der Anode spielen. Es erhebt sich dann die weitere Frage, ob die für die Schichtenbildung verantwortlichen Spaltprozesse im Gasraum oder auf der Anode selbst beim Aufprall der Elektronen stattfinden. Um dieser Frage nachzugehen, wurde ein Versuch ausgeführt, zu dessen Erläuterung folgendes vorausgeschickt sei. In der Entladung fließt ein Elektronenringstrom [4], dessen Richtung von der Richtung des Magnetfeldes abhängt. Die Elektronen haben also bei ihrem Aufprall auf die Anode eine Vorzugsrichtung ihrer Bewegung in tangentialer Richtung. Bringt man nun auf die Objektträgerblende ein übermikroskopisches Objekt, z. B. MgO-Kristalle, auf und läßt eine Schicht aufwachsen, so beobachtet man im Bild auf der „Schattenseite“ der Kristalle eine bedeutend geringere Schichtdicke als auf der entgegengesetzten Seite, wo die Elektronen abgefangen werden (Abb. 10). Die Ermittlung der Richtung des Elektronenringstroms relativ zur Orientierung der Objektträgerblende wird dabei dadurch ermöglicht, daß eine 7-Lochblende verwendet wird, bei

der die Folien der zentralen Bohrung sowie einer weiteren der sechs übrigen Bohrungen durchstochen werden. Auf diese Weise ist die Lage der Objektträgerblende sowohl auf der Anode der Versuchsanordnung

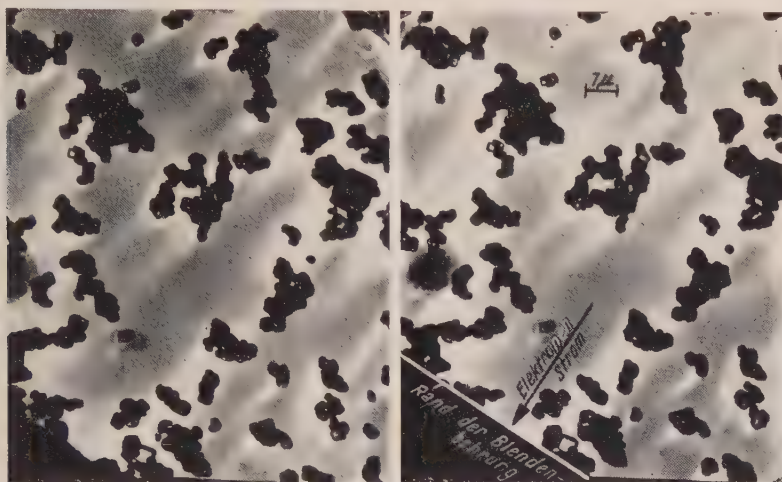


Abb. 10. Abschattungen bei der Umhüllung eines übermikroskopischen Objektes infolge des Elektronenringstromes bei Verwendung eines magnetischen Gleichfeldes. Massendicke auf der objektfreien Folie $1,5 \cdot 10^{-8}$ g/cm². Vergrößerung 4900.

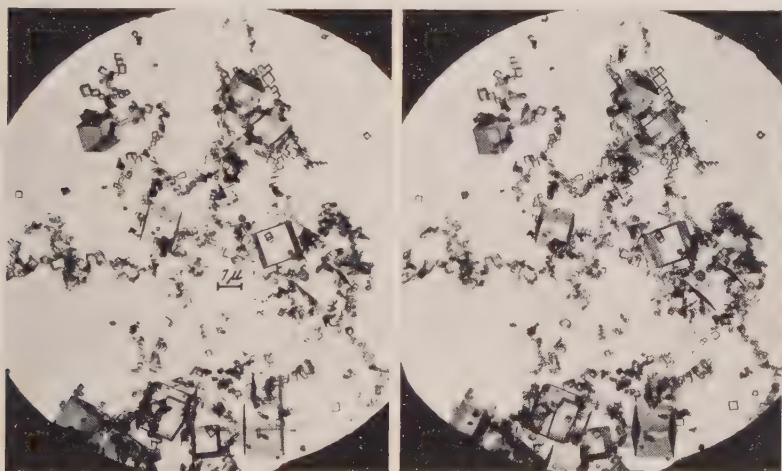


Abb. 11. Hüllen von MgO, hergestellt in der Anordnung Abb. 2 mit Methan und einem magnetischen Wechselfeld zur Vermeidung der Abschattungen. Massendicke auf der objektfreien Folie $5 \cdot 10^{-8}$ g/cm². Vergrößerung 3900.

wie auch später im Übermikroskop definiert. Aus diesem Versuch kann nun geschlossen werden, daß Spaltprozesse im Entladungsraum beim

Schichtwachstum auf der Anode nicht die entscheidende Rolle spielen. Hierfür spricht auch vor allem die Tatsache, daß das Schichtenwachstum unabhängig von B ist, während die Energie, mit der die Elektronen im Mittel im Gasraum stoßen, und damit auch die Stoßausbeute im Gasraum, von U/B abhängig ist [2, 3]. Es kommt somit als Ort, wo die Spaltprozesse vorzugsweise stattfinden, die Anode selbst in Frage. Es werden offenbar die adsorbierten CH_4 -Moleküle durch die auftreffenden Elektronen zerlegt und in ein festes Polymerisat umgewandelt. Man muß dabei in Erwägung ziehen, daß bei 10^{-3} Torr $5 \cdot 10^{17}$ CH_4 -Moleküle/ cm^2sec auf die Anode treffen, während bei einem Strom von 2 mA, mit dem meistens gearbeitet wurde, nur $1 \cdot 10^{15}$ Elektronen/ cm^2sec die Anode erreichen. Es stehen also jedem auftreffenden Elektron eine sehr große

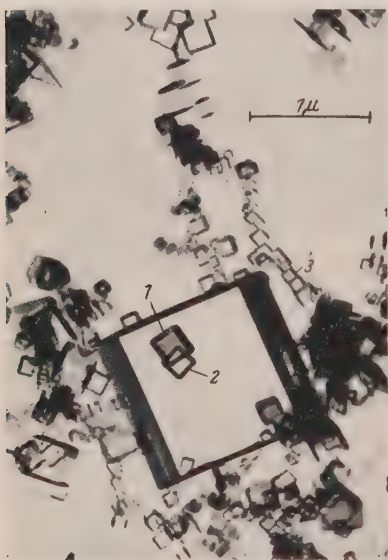


Abb. 12. Ausschnitt aus Abb. 11 (rechts vom μ -Strich) zur Vermessung der Wandstärke der Würfel 1, 2, 3. Würfel 1 weit exponiert Würfel 3 durch Objektteile abgeschirmt. Vergl. Tabelle. Vergrößerung 17 800.

Anzahl von CH_4 -Molekülen für die Spaltprozesse zur Verfügung. Die Ausbeute, mit der diese Spaltprozesse vor sich gehen, ist durch die Funktion $F(U)$ gekennzeichnet. Sie ist, wie auch die Ausbeuten von anderen Elektronenstoßprozessen von der Geschwindigkeit der Elektronen abhängig. Die Energie, mit der die Elektronen auf die Anode treffen, ist eU vermindert um einen Energieverlust durch unelastische Stöße im Gasraum. Dieser Energieverlust dürfte 50 bis 100 eV betragen, da größenordnungsmäßig mit fünf unelastischen Stößen des Elektrons auf dem Wege von der Kathode zur Anode zu rechnen ist. Eine Druckabhängigkeit der Ausbeute $F(U)$ ist erst bei sehr viel niedrigeren Gasdrücken, als sie bei den beschriebenen Versuchen vorliegen, zu erwarten, und zwar dann, wenn die Zahl der auf die Anode pro cm^2 und sec auftreffenden Elektronen vergleichbar wird mit der entsprechenden Zahl

der CH_4 -Moleküle. Für die Auffassung, daß die Spaltprozesse in überwiegender Anzahl auf der Anodenoberfläche stattfinden, spricht neben anderen Beobachtungen [10] z. B. die Tatsache, daß es W. SCHEFFELS, M. HAHN und F. LENZ [16] gelang, scharfe Bilder von Kaustikflächen elektronenmikroskopischer Objektive auf einer Collodiumfolie durch den Elektronenstrahl zeichnen zu lassen.

Selbstverständlich werden auch Spaltprozesse im Gasraum, und zwar insbesondere in unmittelbarer Nähe der Anode eine gewisse Rolle spielen, weil hier die Elektronenstromdichte und ferner die Wahrschein-

lichkeit, daß neutrale oder negativ geladene Spaltprodukte die Anode treffen, besonders groß sind. Weiter wäre in Erwägung zu ziehen, welchen Einfluß die Anodenzerstäubung durch negative Ionen auf das Schichtenwachstum hat.

6. Anwendungen in der Elektronenmikroskopie.

Die durch den Elektronenringstrom verursachten Schattenwirkungen bei der Herstellung eines übermikroskopischen Abdrucks können völlig vermieden werden, wenn man an Stelle des magnetischen Gleichfeldes ein Wechselfeld (50 Hz) verwendet. Der Ringstrom wechselt dann seine Richtung im gleichen Rhythmus wie das Magnetfeld. Daß auch in axialer Richtung ein nahezu gleichmäßiges Aufwachsen der Schicht stattfindet, dafür sorgen die Streuprozesse im Gasraum sowie das durch die Endflächen der Anordnung bewirkte Pendeln der Elektronen in axialer Richtung. Ein Beispiel für einen auf diese Weise erhaltenen Abdruck zeigt das Stereobildpaar Abb. 11. Es handelt sich hier um ein MgO-Präparat, das zunächst in der CH_4 -Atmosphäre mit einer Schicht umhüllt und anschließend aus der Umhüllung durch verdünnte HCl herausgelöst ist. Eine Verfestigung der Hüllen durch Elektronenbestrahlung oder durch Wärmebehandlung vor dem Herauslösen ist nicht erforderlich. Die Massendicke auf der objektfreien Folie ist $5 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$, also rund 40% der Aufhellungsdicke bei 80 kV. Dabei ist die Umhüllung mechanisch fest genug, um den Beanspruchungen beim chemischen Lösungsvorgang (osmotischer Druck, Oberflächenspannung bei Eindunsten der Flüssigkeitstropfen) standhalten zu können. Als Testobjekt wurde MgO deshalb gewählt, weil die Würfelform mechanisch ungünstiger ist als eine verrundete Form und weil Verformungen durch den Lösungsvorgang sich leichter an Würfeln als an Körpern mit gekrümmten Oberflächen zu erkennen geben. Ferner gestattet dieses Objekt in bequemer Weise die Bestimmung der Wiedergabetreue des übermikroskopischen Abdrucks, indem man an den Wachstumsstufen [17, 6] den kleinsten noch auflösbaren Strichabstand ermittelt (Abb. 14). Auf diese Weise findet man bei einer Massendicke von $5 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$ auf der objektfreien Folie eine Wiedergabetreue von 3μ . Mit weiter wachsender Massendicke sinkt die Wiedergabetreue, weil sich eine Eigenstruktur der Abdruckschicht bemerkbar macht und

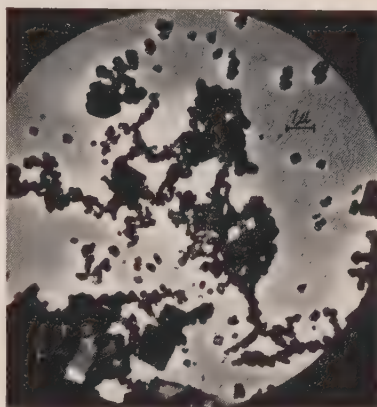


Abb. 13. Objekt Abb. 11, nur sehr viel stärker umhüllt, so daß es nur noch schwach durchstrahlbar ist. Man erkennt deutlich die Eigenstruktur der Schicht und die Abschirmung durch benachbarte Objektteile. Massendicke auf objektfreier Folie $2,7 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$. Vergrößerung 3200.

standhalten zu können. Als Testobjekt wurde MgO deshalb gewählt, weil die Würfelform mechanisch ungünstiger ist als eine verrundete Form und weil Verformungen durch den Lösungsvorgang sich leichter an Würfeln als an Körpern mit gekrümmten Oberflächen zu erkennen geben. Ferner gestattet dieses Objekt in bequemer Weise die Bestimmung der Wiedergabetreue des übermikroskopischen Abdrucks, indem man an den Wachstumsstufen [17, 6] den kleinsten noch auflösbaren Strichabstand ermittelt (Abb. 14). Auf diese Weise findet man bei einer Massendicke von $5 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$ auf der objektfreien Folie eine Wiedergabetreue von 3μ . Mit weiter wachsender Massendicke sinkt die Wiedergabetreue, weil sich eine Eigenstruktur der Abdruckschicht bemerkbar macht und

die Kontrastverhältnisse ungünstiger werden. Dies zeigt sehr deutlich Abb. 13. Es handelt sich hier um das Objekt Abb. 11, auf dem man die Schicht bis zu einer Massendicke von $27 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$ in der Gasentladungsapparatur weiter anwachsen ließ. Außerdem erkennt man in Abb. 13 auch sehr deutlich eine Abschirmung bei der Schichtaufbringung durch benachbarte Objektteile.

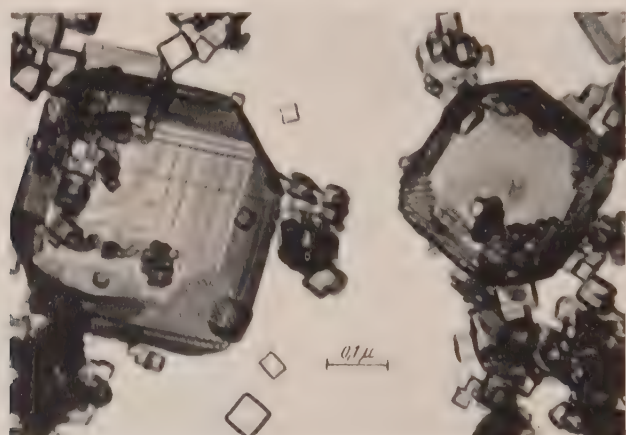


Abb. 14. Zur Bestimmung der Wiedergabetreue dient der kleinste noch auflösbare Strichabstand der Wachstumsstufen von MgO. Massendicke der objektfreien Folie $5 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$. Vergrößerung 85 000

Die Wandstärke der Würfelhüllen, die man aus dem übermikroskopischen Bild in solchen Fällen entnehmen kann, wo die Würfel­flächen­normale senkrecht zum Elektronenstrahl steht², ist je nach Lage der Würfel etwas unterschiedlich. Dies rührt, wie schon Abb. 13 zeigte, daher, daß benachbarte Objektteile eine abschirmende Wirkung bei der Hüllenbildung ausüben. Als Beispiel sind in der folgenden Tabelle die an verschiedenen Stellen des Objektes Abb. 11 ermittelten Wandstärken aufgeführt. Eine Vergrößerung des ausgewählten Objektbereiches zeigt Abb. 12. Bei stereoskopischer Betrachtung erkennt man, daß Würfel 1 am weitesten aus der Umgebung herausragt; Würfel 2 liegt unterhalb Würfel 1 und Würfel 3 wiederum unterhalb des großen, die beiden erstgenannten tragenden Würfels. Die Wandstärken dieser Würfel wurden an den in Abb. 12 mit den Zahlen bezeichneten Stellen bei verschiedenen Massendicken an Hand der Photoplatte gemessen. Das Präparat wurde dabei in wechselnder Reihenfolge in die Gasentladungsapparatur zur weiteren Schichtaufbringung und ins Übermikroskop zur Herstellung des Bildes gegeben.

² Der bei der Ausmessung der Wandstärke entstehende Fehler hängt von $h \cdot \cos \alpha$ ab, wobei h die Würfelhöhe und α den Winkel zwischen Strahlrichtung und Würfel­flächen­normale bedeuten. Der Fehler ist um so kleiner, je niedriger der Würfel ist. Da α nicht genau bekannt ist, ist eine Fehlerangabe zur Zeit nicht möglich.

Massendicke auf der objektfreien Folie ($\text{g/cm}^2 \cdot 10^4$)	5	7,5	12	16,5
Wandstärke ($\text{m}\mu$)				
von Würfel 1	39	54	77	120
von Würfel 2	36	50	70	107
von Würfel 3	23	32	45	68
Schichtdicke ($\text{m}\mu$)				
berechnet mit $\gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$	33	50	80	110

Die Zahlen der Tabelle zeigen das Ausmaß der durchstrahlenden Wirkung. Ferner ist die aus der Massendicke auf der objektfreien Folie und der besonders bestimmten Dichte der Schicht $\gamma = 1,5 \text{ g/cm}^3$ errechnete Schichtdicke eingetragen. Man erkennt, daß die berechnete Schichtdicke innerhalb 15% mit der Wandstärke der entsprechend besetzten Würfel übereinstimmt. Es ergibt sich damit die Möglichkeit, Schichtdickenmessungen mit Hilfe des Gasmikroskops durch Bestimmung der Wandstärke geeigneter liegender Würfel auszuführen.

Über zur Zeit laufende Untersuchungen über die Schichtbildung bei Verwendung anderer chemischer Verbindungen, über die auf der Kathode entstehenden Schichten und über die physikalische und die elektrochemische Kathodenzerstörung in der atmosphärischen Hochvakuumentladung soll in späteren Mitteilungen berichtet werden.

Herrn Dr. F. GRASENICK danke ich für wertvolle Hinweise in präparations-technischen Fragen und den Herren Dr. O. REITER und M. Sc. A. MOHAMED für Unterstützung bei der Ausbildung der Experimenten. Forschungsstelle für Elektronenmikroskopie, Graz, Rechbauerstr. 12.

Literatur.

1. B. V. BORRIES, Die Übermikroskopie, Berlin 1949, S. 173.
 2. R. HARPER, Acta Physica Austriaca VII, 52, 1953.
 3. R. HARPER, Acta Physica Austriaca VII, 251, 1953.
 4. R. HARPER, Acta Physica Austriaca VIII, 213, 1954.
 5. R. HARPER, Acta Physica Austriaca, im Druck.
 6. F. GRASENICK u. R. HARPER, Phys. Verh. 4, 102, 1953.
 7. A. GENTHERSCHULZE, ZS. f. Phys. 36, 563, 1926.
 8. L. HIESINGER u. H. KÖNIG, Heraeus-100 Jahrbuch 1951.
 9. H. KÖNIG, Naturwiss. 35, 261, 1948.
 10. H. KÖNIG, ZS. f. Phys. 129, 483, 1951.
 11. H. KÖNIG u. G. HELWIG, ZS. f. Phys. 129, 491, 1951.
 12. H. KÖNIG, Ergebn. exakt. Naturwiss. 27, 222, 1953.
 13. W. D. HARKINS, Trans. Faraday Soc. 30, 221, 1934.
 14. O. EISENHUT u. R. CONRAD, Z. Elektrochemie 38, 654, 1930; Trans. Faraday Soc. 30, 215, 1934.
 15. F. M. PENNING, Physica 3, 873, 1936 — ibid. 4, 71, 1937.
 16. W. SCHREFFELS, M. HAHN u. F. LENZ, Optik 10, 455, 1953.
 17. F. GRASENICK u. R. HARPER, Monatsh. Chemie 83, 1069, 1952.
 18. G. GORBACH, Mikrokchimica Acta, im Druck.
- Acta Physica Austriaca. Bd. IX/1.

Eigendruckverbreiterung der Rubidiumlinien $\lambda = 7800,23 \text{ \AA}$ und $\lambda = 7947,60 \text{ \AA}$ und ihrer Zeemankomponenten in Absorption.

Von

Josef Tomiser.

Ausgeführt am Physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Wien.

Mit 2 Tafeln und 12 Abbildungen.

(Eingelangt am 9. November 1953.)

Inhalt.

Es wird die Eigendruckverbreiterung der Rubidium-Resonanzlinien und ihrer ZEEMAN-Komponenten bei kleinen Drücken quantitativ untersucht und die Ergebnisse mitgeteilt.

Einleitung.

Im Rahmen einer größeren Untersuchungsreihe über die Eigendruckverbreiterung der Alkali-Resonanzlinien und ihrer ZEEMAN-Komponenten, wurde auch das Rubidium untersucht.

Die auftretenden Schwierigkeiten bei der Temperaturbestimmung wurden auf folgende Weise beseitigt:

Zuerst wurden die unaufgespaltenen Linien untersucht. Hierbei befand sich die Absorptionszelle in einem Thermostaten, dessen Temperatur mit zwei Thermoelementen bis auf $\pm 0,1^\circ \text{C}$ gemessen und ständig kontrolliert werden konnte. Die Aufnahmen wurden dann mikrophotometriert und mit Hilfe der Schwärzungskurven die Halbwertsbreite $\Delta \lambda$ aus der Originalphotometerkurve bestimmt. Die Dampfdücke p wurden aus der Formel

$$\log p = 7.331 - \frac{4209}{T}$$

berechnet. Sie stammt von D. H. SCOTT [1], der die Sättigungsdrücke für das Rubidium gemessen hat.

Die Untersuchungsanordnung und die Auswertung der Aufnahmen ist in der Arbeit über die Eigendruckverbreiterung der Natrium-Resonanzlinien [2] im einzelnen beschrieben.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde die vorher gefundene Abhängig-

keit der Halbwertsbreiten $\Delta \lambda$ von der Temperatur T , die in der Abb. 1 graphisch dargestellt ist, als Eichkurve zur indirekten Temperaturbestimmung bei den ZEEMAN-Aufnahmen verwendet. Der Vorgang bei dieser Methode ist kurz folgender: Vor und nach jeder ZEEMAN-Aufnahme wurde je eine Aufnahme der Rubidiumresonanzlinien ohne Feld gemacht, und zwar ohne die geringste Änderung der Versuchsanordnung. Aus den Halbwertsbreiten dieser Linien und der Eichkurve Abb. 1 wurde dann die zugehörige Temperatur bestimmt.

Diese Methode der Temperaturbestimmung ist sicher einer direkten Temperaturmessung weit überlegen, denn der zur Verfügung stehende Raum zwischen den Polschuhen schließt praktisch die Anbringung eines direkten Druckmeßgerätes aus. Die Versuche, in die Absorptionszellen Thermolemente einzubauen, lieferten so ungenaue Temperaturwerte, daß an eine quantitative Auswertung nicht zu denken gewesen wäre.

Die apparativen und methodischen Einzelheiten dieser Untersuchungen sind ebenfalls in einer früheren Arbeit [3] genau beschrieben worden.

Ergebnisse.

Die Ergebnisse des ersten Teiles der Arbeit sind in den Abb. 1 und 2 graphisch dargestellt.

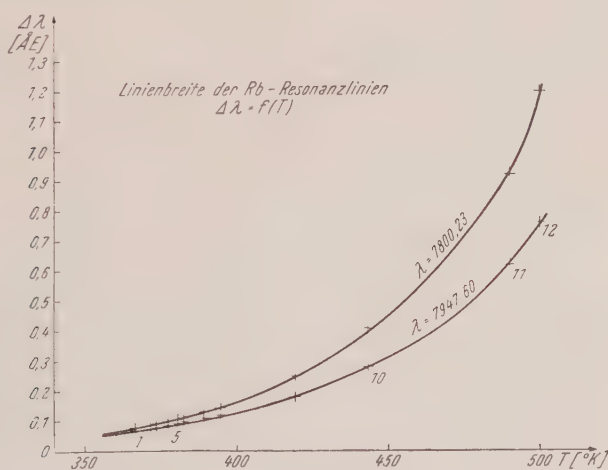


Abb. 1

Abb. 1 zeigt die Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta \lambda$ von der Temperatur T . Diese Kurven dienen bei den ZEEMAN-Aufnahmen als Eichkurven für die Temperatur T .

Abb. 2 gibt den funktionellen Zusammenhang zwischen der Halbwertsbreite und dem Dampfdruck p wieder.

Aus den beiden Abbildungen ist ersichtlich, daß genau so wie beim Natrium und Kalium, auch beim Rubidium die kurzwellige Linie stärker als die langwellige Linie verbreitert.

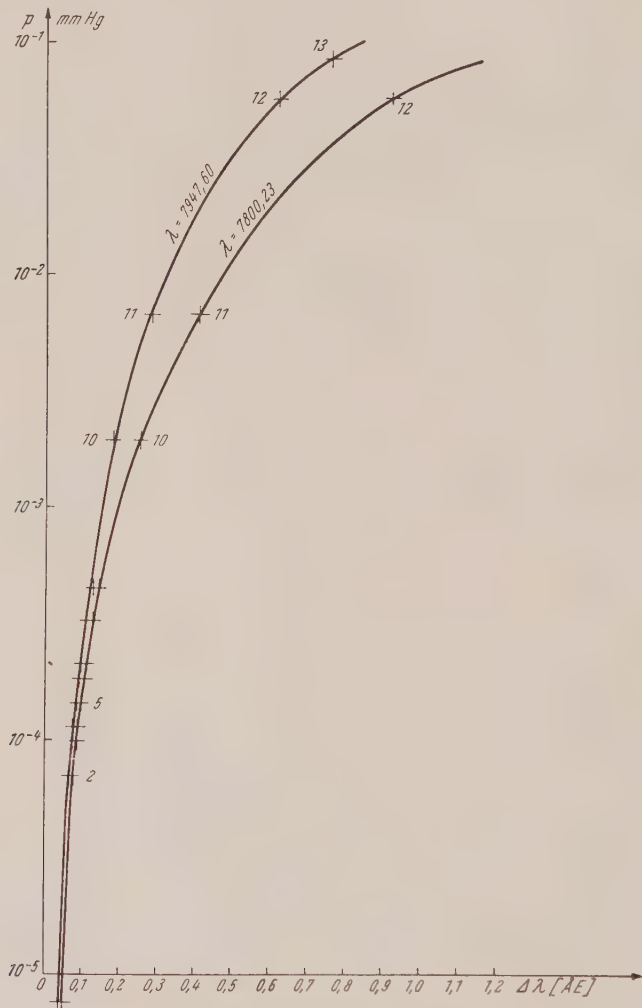


Abb. 2. Abhängigkeit des Druckes p in mm Hg von der Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ für die Rubidium-Resonanzlinien.

Die von den verschiedenen Theorien für kleine Druckbereiche geforderte lineare Verbreiterung der beiden Linien ist nicht erfüllt.

Die Ergebnisse der Druckverbreiterung bei der ZEEMAN-Aufspaltung sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Die Abb. 3 bis 12 zeigen graphisch die Abhängigkeit der $\Delta\lambda$ vom Dampfdruck p .

Aus ihnen sieht man, daß die ZEEMAN-Komponenten der kurzwelligen Linie stärker als die der langwelligen Linie verbreitern. Dies ist in Übereinstimmung mit den unaufgespaltenen Linien. Die Linearität der Druckverbreiterung ist auch hier nicht erfüllt.

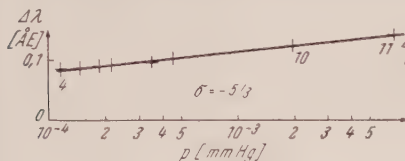


Abb. 3

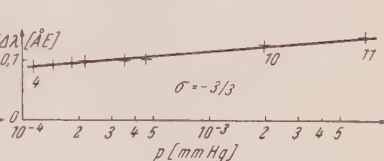


Abb. 4

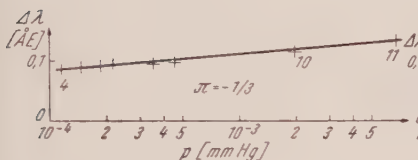


Abb. 5

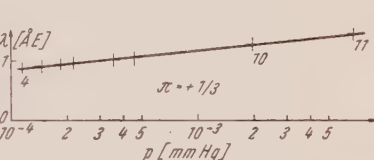


Abb. 6

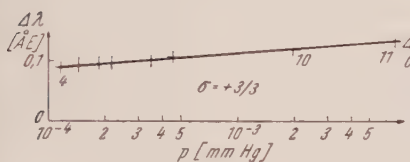


Abb. 7

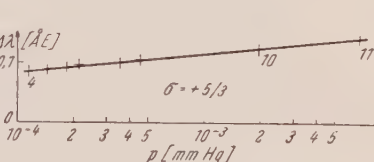


Abb. 8

Abb. 3—8. Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ vom Druck p für die ZEEMAN-Komponenten der Rubidiumlinie $\lambda=7800.23$, Å.

Die Bildertafel zeigt 14 Aufnahmen. Über den ZEEMAN-Aufspaltungen sind jeweils die zugehörigen unaufgespaltenen Linien zu sehen. Aufnahme 1 wurde zur Auswertung nicht herangezogen, da die Absorption noch zu gering ist. Bis zur Aufnahme 7 ist das Aufspaltungsbild regulär, dann treten verbotene Komponenten, die von der Hyperfeinstruktur herrühren, auf. Die sechsfache Aufspaltung zeigt ab Aufnahme 10 auch zwei $9/3\text{-}\sigma$ -Komponenten. Aufnahme 14 wurde wegen der starken Verbreiterung nicht ausgewertet. Sie ist aber sehr interessant, da das Aufspaltungsbild eine deutliche Unsymmetrie zeigt.

Eine genaue Betrachtung der Bilder zeigt bezüglich der Maximalabsorption der einzelnen Komponenten noch einige bemerkenswerte Details.

Die $5/3\text{-}\sigma$ -Komponenten der sechsfachen Aufspaltung weisen bis zur Aufnahme 7 eine kleinere Maximalabsorption als die $3/3\text{-}\sigma$ - und $1/3\text{-}\pi$ -

Komponenten auf. In Aufnahme 8 ist sie bei allen Komponenten gleich. Bei 9 und 10 ist es gerade umgekehrt und bei Aufnahme 12 sind wieder die 5/3-Komponenten die schwächeren.

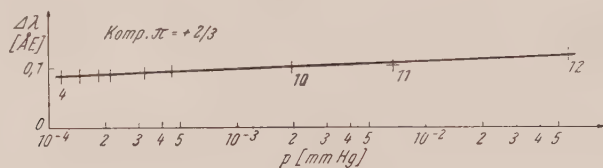


Abb. 9

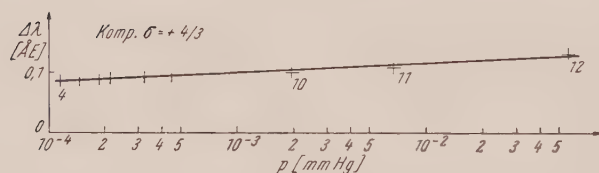


Abb. 10

Abb. 9—10. Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ vom Druck p für die ZEEMAN-Komponenten der Rubidium-Linie $\lambda = 7947,60$.

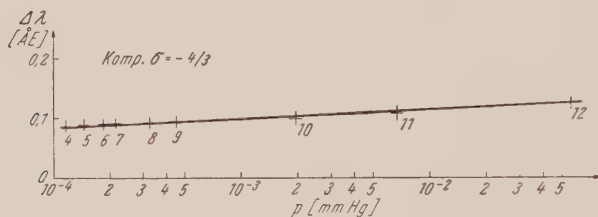


Abb. 11

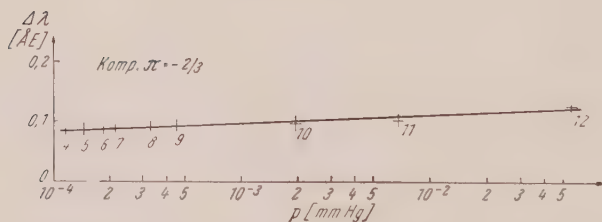


Abb. 12

Abb. 11—12. Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ vom Druck p für die ZEEMAN-Komponenten der Rubidium-Linie $\lambda = 7947,60$.

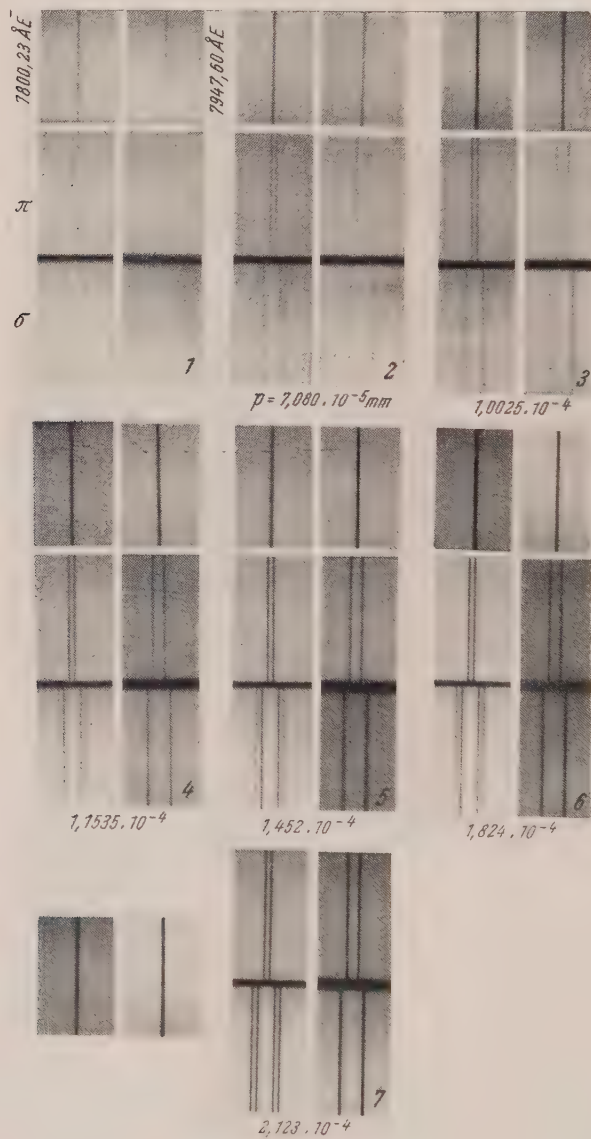
Bei der vierfachen Aufspaltung überwiegt die Maximalabsorption der 4/3- σ -Komponenten diejenige der 2/3- π -Komponenten in steigendem Maße.

Tabelle.

Aufnahme	Temperatur T	Druck in mm Hg	$\Delta \lambda =$ Halbwertsbreiten in ÅE											
			ohne Magnetfeld		mit Magnetfeld									
			$\lambda =$ 7800,23 ÅE	$\lambda =$ 7947,60 ÅE	$\lambda = 7800,23$ ÅE									
					5	3	1	1	3	5	4	2	2	4
					3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1														
2	366,7	$7,080 \cdot 10^{-5}$	0,075	0,065										
3	371,5	$1,0025 \cdot 10^{-4}$	0,085	0,071										
4	373,5	$1,1535 \cdot 10^{-4}$	0,090	0,078										
5	377,2	$1,452 \cdot 10^{-4}$	0,096	0,085										
6	380,2	$1,824 \cdot 10^{-4}$	0,104	0,091										
7	382,2	$2,123 \cdot 10^{-4}$	0,109	0,097										
8	389,0	$3,243 \cdot 10^{-4}$	0,126	0,109										
9	394,4	$4,560 \cdot 10^{-4}$	0,140	0,118										
10	419,2	$1,950 \cdot 10^{-3}$	0,247	0,178										
11	443,0	$6,758 \cdot 10^{-3}$	0,408	0,276										
12	490,0	$5,518 \cdot 10^{-2}$	0,920	0,619										
13	500,0	$8,185 \cdot 10^{-2}$	1,200	0,760										
					0,086	0,090	0,086	0,086	0,090	0,086	0,086	0,086	0,086	0,086
					0,087	0,095	0,088	0,090	0,094	0,087	0,089	0,086	0,087	0,087
					0,090	0,097	0,092	0,095	0,095	0,090	0,090	0,088	0,088	0,089
					0,094	0,099	0,095	0,097	0,098	0,097	0,092	0,089	0,090	0,092
					0,096	0,100	0,095	0,101	0,100	0,100	0,094	0,090	0,092	0,094
					0,103	0,103	0,098	0,105	0,104	0,105	0,095	0,091	0,095	0,095
					0,122	0,126	0,115	0,129	0,119	0,125	0,099	0,098	0,103	0,100
					0,144	0,141	0,136	0,144	0,134	0,141	0,107	0,101	0,104	0,109
											0,128	0,122	0,120	0,131

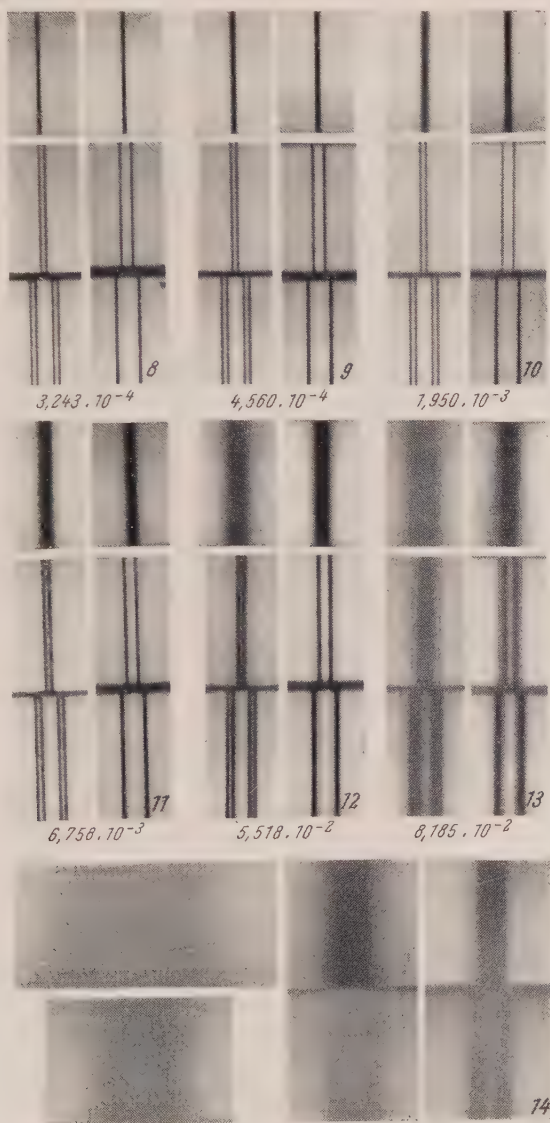
Zusammenfassung.

Die vorliegende Untersuchung der Eigendruckverbreiterung der Rubidiumresonanzlinien und ihrer ZEEMAN-Komponenten brachte folgende Ergebnisse.



Tafel I

1. Die kurzwellige Linie verbreitert stärker als die langwellige Linie.
2. Eine Linearität der Verbreiterung mit dem Dampfdruck wurde nicht beobachtet.
3. Die ZEEMAN-Komponenten der kurzwelligen Linie verbreitern ebenfalls stärker als die der langwelligen Linie.



Tafel II

4. Die Maximalabsorption der ZEEMAN-Komponenten ist verschieden groß und schwankt außerdem noch innerhalb der Komponenten.

5. Bei den höheren Drücken treten verbotene Komponenten auf, die von der Hyperfeinstruktur herrühren.

6. Beim höchsten Druck zeigt sich eine Unsymmetrie des Aufspaltbildes.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse für Natrium, Kalium, Rubidium und ein Vergleich mit den verschiedenen Theorien folgt in einer späteren Arbeit.

Seinem verehrten Lehrkanzelvorstand, Prof. Dr. L. FLAMM, ist der Verfasser zu Dank verpflichtet, da dieser die Durchführung der Arbeiten über die Eigendruckverbreiterung an den Na-, K- und Rb-Resonanzlinien und ihren ZEEMAN-Komponenten erst ermöglichte und stets förderte.

Literatur.

1. D. H. SCOTT, Phil. Mag. Bd. 47, 1924, S. 32.
2. J. TOMISER, Acta Phys. Austr. 8, 198 (1953).
3. J. TOMISER, Eigendruckverbreiterung der inversen ZEEMAN-Komponenten der Natrium-D-Linien. Acta Phys. Austr. 8, 276 (1954).

Ein statistisches Verfahren zur Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung durch elektronische Rechenmaschinen.

Von

Henning Harmuth

Institut für Niederfrequenztechnik der Technischen Hochschule Wien.

Mit 8 Abbildungen.

(Eingelangt am 21. April 1954.)

Übersicht.

Das Rechenprogramm elektronischer Rechenmaschinen wird meist durch Lochstreifen oder ähnliche Mittel gesteuert, die vor der Rechnung in mühevoller Arbeit für die zu lösende Aufgabe hergestellt werden müssen. Eine wesentliche Vereinfachung dieser Vorbereitungsarbeit brachte die sogenannte Monte Carlo-Methode, die jedoch wegen der langwierigen Rechnung kaum eine Genauigkeit des Resultates von mehr als zwei Dezimalstellen erzielen läßt. Ein ähnliches, jedoch viel schneller arbeitendes Verfahren läßt sich vom Prinzip des bekannten GALTON-Brettes ableiten. Dieses läßt sich elektronisch leicht nachbilden, indem man die über das GALTON-Brett laufenden Kugeln durch elektrische Impulse und die Nägel durch Speicher für diese Impulse ersetzt. Die elektronische Nachbildung des GALTON-Brettes leistet natürlich viel mehr als das mechanische Modell.

Einführung.

Wir wollen die LAPLACESche Differentialgleichung

$$\Delta U = 0$$

als Sonderfall der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta U = a \frac{\partial U}{\partial t}$$

für $\partial U / \partial t = 0$ betrachten. Diese Differentialgleichung lautet als Differenzengleichung für den eindimensionalen Fall geschrieben:

$$\frac{(U + 2\Delta U) - (U + \Delta U)}{\Delta x} - \frac{(U + \Delta U) - U}{\Delta x} = a \frac{(U + \Delta U_t) - U}{\Delta t}$$

Mit

$$U_1 = U + 2\Delta U, \quad U_2 = U + \Delta U \quad \text{und} \quad U_3 = 0$$

erhält man daraus

$$U_1 - 2 U_2 + U_3 = a \Delta U_i \quad (1)$$

wobei

$$a = a \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad (2)$$

ist.

Betrachten wir andererseits einen Ausschnitt aus dem GALTON-Brett (Abb. 1) und berechnen die Zahl der Kugeln B' , die in Zeile $N = 2$

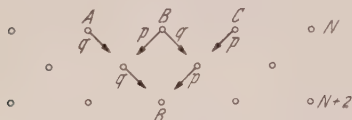


Abb. 1. Ausschnitt aus dem Galtonbrett.

auf einen Nagel treffen. Die Zahl der Kugeln, die in Zeile N auf die einzelnen Nägel trifft ($A, B, C, \dots$), sei bekannt. Falls bei jedem Nagel die Kugeln im Verhältnis p/q geteilt werden ($p + q = 1$), erhalten wir für B' :

$$B' = q^2 A + 2 p q B + p^2 C$$

Die Differenz $B' - B$ wird daher:

$$B' - B = q^2 A - 2 \left(\frac{1}{2} - p q \right) B + p^2 C = \frac{1}{4} (A - 2 B + C) \quad (3)$$

Für $p = q = \frac{1}{2}$ geht Gl. (3) in Gl. (1) über, wenn wir $B' - B = \Delta U_i$,

$A = U_1$, $B = U_2$, $C = U_3$ und $a = a \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 4$ setzen. Durch die Beziehung $\alpha = 4$ werden Längen- und Zeitmaßstab gekoppelt. Der stationäre Zustand $B' = B$ gibt eine Lösung der LAPLACESchen Differentialgleichung.



Abb. 2. Potential zwischen zwei Platten.

Wir wollen ein Beispiel an Hand von Abb. 2 betrachten. Eine positive (+ 1) und eine negative Ladung (− 1) befinden sich im Abstand 4 voneinander; das entstehende Feld soll berechnet werden.

In der letzten und vorletzten Zeile der Abb. 2 sind neben den mit Hilfe des GALTON-Brettes errechneten Werten die exakten Werte angegeben. Die Potentialwerte zwischen den beiden Ladungen stimmen recht genau. Beispielsweise beträgt der Fehler für die Punkte $1/2$ und $-1/2$ beim zehnten Schritt nur noch $16/1024 = 0,15\%$. Im übrigen Gebiet ist die Konvergenz jedoch außerordentlich schlecht. Dies ist weiter nicht verwunderlich, da man einigermaßen stationäre Lösungen der Wärmeleitungsgleichung erst nach einer Zeit erwarten kann, die groß ist gegen die Zeit, die die Wärme benötigt, um sich über das zur Verfügung stehende Gebiet auszubreiten. Im Falle des GALTON-Brettes bedeutet dies, daß die Zahl der Zeilen N groß gegen die Zahl der Spalten zwischen den Begrenzungen sein soll.

Eine Methode zur Verbesserung der Konvergenz ist in Abb. 3 angegeben.

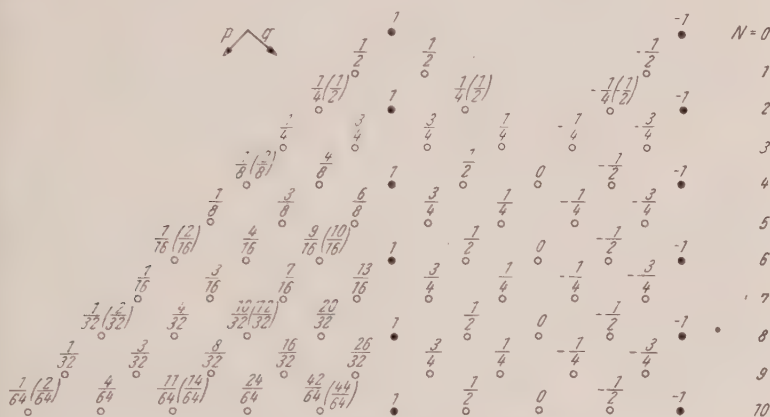


Abb. 3. Verbesserung der Konvergenz.

Hier wird zum Wert jedes Punktes der geradzahlgigen Zeilen die Differenz zum Wert des entsprechenden Punktes in der vorangegangenen geradzahlgigen Zeile hinzugezählt. Zum Beispiel beträgt die Differenz zwischen den Werten $9/16$ (Zeile 6) und $4/8$ (Zeile 4) ein Sechzehntel, so daß der Wert $9/16$ auf $10/16$ erhöht wird. Man erkennt, daß in Abb. 3 zwischen den Ladungen 1 und -1 schon in Zeile 4 der exakte Wert erreicht wird.

Poissonsche Differentialgleichung.

Zur Lösung der POISSONSchen Differentialgleichung mit Hilfe des GALTON-Brettes gehen wir von der Wärmeleitungsgleichung unter Berücksichtigung von Wärmequellen aus:

$$\Delta U - \frac{\partial U}{\partial t} = q$$

Als eindimensionale Differenzengleichung geschrieben lautet sie:

$$U_1 - 2 U_2 + U_3 = \alpha \Delta U_t - \varrho \quad (4)$$

Betrachten wir nun wie früher einen Ausschnitt aus einem GALTON-Brett, dem jedoch zusätzlich bei jedem Nagel noch R Kugeln zugeführt werden, dann erhalten wir nach Abb. 4 folgende Gleichungen:

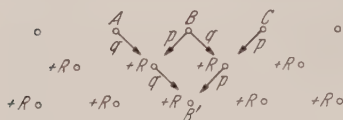


Abb. 4. Galtonbrett mit Quellen.

$$\begin{aligned} B' &= A q^2 + 2 B p q + p^2 C + \\ &+ R(p + q) + R = A q^2 + \\ &+ 2 B p q + p^2 C + 2 R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' - B &= A q^2 - 2 \left(\frac{1}{2} - p q \right) B + p^2 C + 2 R = \\ &= \frac{1}{4} (A - 2 B + C) + 2 R \quad p + q = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Übereinstimmung mit Gl. (4) wird erzielt, wenn man setzt:

$$A = U_1, \quad B = U_2, \quad C = U_3, \quad B' - B = \Delta U_t,$$

$$\alpha = a \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 4 \quad \text{und} \quad 8 R = \varrho$$

Für den stationären Fall $\partial U / \partial t = 0$ erhält man damit eine Methode zur numerischen Lösung der POISSONschen Differentialgleichung $\Delta U = -\varrho$.

Grenzschichten.

Zur Untersuchung, ob das GALTON-Brett für die Lösung der LAPLACESchen und POISSONschen Differentialgleichung auch Grenzschichten nachzubilden gestattet, wollen wir von Abb. 5 ausgehen.

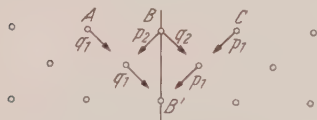


Abb. 5. Grenzschicht.

Beiderseits der Grenzschicht gilt $p_1/q_1 = 1$ und $p_1 + q_1 = 1$, daher ist $p_1 = q_1 = 1/2$; in der Grenzschicht sei das Verhältnis p_2/q_2 beliebig und nur die Bedingung $p_2 + q_2 = 1$

bleibe bestehen. Wir erhalten daher:

$$B' = A q_1^2 + B (p_2 q_1 + q_2 p_1) + p_1^2 C = \frac{1}{4} A + \frac{1}{2} (p_2 + q_2) B + \frac{1}{4} C$$

$$B' - B = \frac{1}{4} (A - 2 B + C)$$

Dies ist aber wieder Gl. (2), so daß sich das GALTON-Brett also auch für Lösungen an Grenzschichten zwischen verschiedenen gut leitenden Medien eignet: Wäre beispielsweise in Abb. 5 das rechte Medium ein ideal leitender, isoliert aufgestellter Körper, dann könnte ein elektrisches Feld nicht eindringen ($q_2 = 0$, $p_2 = 1$), seine Oberfläche würde aber das Potential der Grenzschicht annehmen.

Mehrdimensionale Lösungen.

Eindimensionale Lösungen der Potentialgleichung ließen sich durch ein zweidimensionales GALTON-Brett darstellen; zwei- und dreidimensionale Lösungen werden entsprechend durch drei- und vierdimensionale GALTON-Bretter wiedergegeben. Beim dreidimensionalen GALTON-Brett haben die „Kugeln“ drei Möglichkeiten, an einem „Nägel“

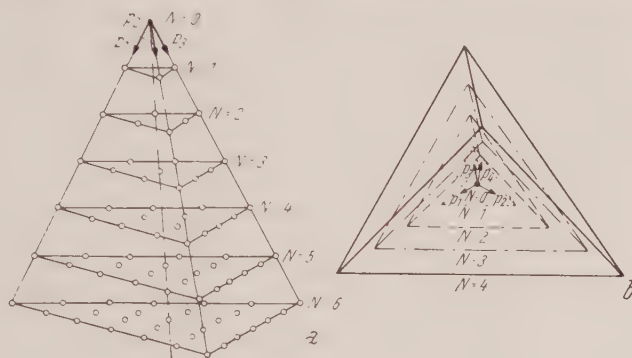


Abb. 6. Mehrdimensionale Galtonbretter.

vorbeizulaufen, man erhält daher eine Pyramide (Abb. 6 a), deren einzelne Netzebenen den Zeilen des GALTON-Brettes entsprechen. Während beim zweidimensionalen GALTON-Brett immer die Nägel der Zeilen N und $N-2$ untereinanderliegen, liegen beim dreidimensionalen die „Nägel“ der Ebenen N und $N+3$ untereinander. Das vierdimensionale GALTON-Brett läßt sich durch ineinandergeschachtelte Tetraeder darstellen (Abb. 6 b); entsprechend liegen dann die „Nägel“ der Tetraeder N und $N+4$ ineinander.

Wir wollen nun die Lösung einer zweidimensionalen Aufgabe an Hand eines Beispiels besprechen. Gesucht sei die Potentialverteilung zwischen zwei großen Platten, die sich auf dem Potential 0, bzw. 10 befinden und zwischen denen Gitterstäbe mit dem Potential —1 angeordnet sind (Abb. 7 a).

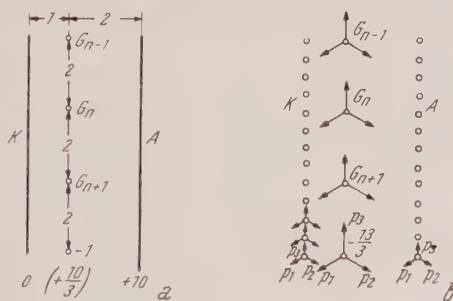


Abb. 7. Plattenförmige Elektroden mit dazwischenstehenden Gitterstäben.

Zur direkten Lösung der Aufgabe kann man nach Abb. 7 b zwei Reihen von dreidimensionalen GALTON-Brettern mit der Ergiebigkeit 0 und 10 anordnen und dazwischen mit wesentlich größeren Abständen GALTON-Bretter mit der Ergiebigkeit —1. Diese GALTON-Bretter

könnten nun einzeln bis zur Ebene N — die von der gewünschten Genauigkeit abhängt — ausgerechnet und die Einzelergebnisse addiert werden. Es ist dabei nur zu beachten, daß die Punkte, die auf konstantem Potential gehalten werden, aus den GALTON-Brettern „herauszuschneiden“ sind; die an solche Stellen gelangenden „Kugeln“ fallen dann aus dem GALTON-Brett heraus. Abb. 8 zeigt beispielsweise den

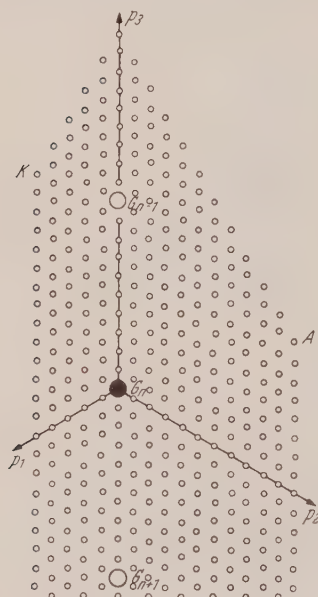


Abb. 8. Galtonbrett für den Gitterstab G_n .

Grundriß eines der GALTON-Bretter mit der Ergiebigkeit — 1, das vom Gitterstab G_n ausgeht. Es wird an zwei Seiten durch die beiden Platten K und A beschnitten und enthält außerdem Löcher an den Stellen der Gitterstäbe G_{n-1} , G_{n+1} usw.

Die Tatsache, daß sich die Lösungen der einzelnen GALTON-Bretter einfach superponieren, gestattet uns, obige Aufgabe noch weiter zu vereinfachen. Lassen wir in Abb. 7 das Gitter weg, dann haben wir es mit einem eindimensionalen Problem zu tun, das praktisch der Aufgabe von Abb. 1 entspricht. Die Lösung ist in diesem Fall trivial, denn das Potential steigt linear von 0 auf 10 an. Diesem Potential überlagert sich nun das von den Gitterstäben erzeugte Potential. Wegen der Gleichheit aller Gitterstäbe in Abb. 7 braucht man nur ein einziges GALTON-Brett zu rechnen, nämlich das in Abb. 8 dargestellte. Eines ist noch zu beachten: Bei der Bestimmung des Potentials zwischen den zwei Platten ohne Gitterstäbe erhält man an den Stellen der Gitterstäbe das Potential $10/3$; führen wir die Gitterstäbe ein und geben ihnen das Potential — $13/3$, dann überlagern sich die beiden Werte und wir erhalten das gewünschte Potential — 1. Praktisch bedeutet dies, daß das GALTON-Brett der Abb. 8 an der Stelle G_n eine Quelle mit der Ergiebigkeit — $13/3$ statt — 1 haben muß.

Zusammenfassung.

LAPLACESche und POISSONSche Differentialgleichungen lassen sich in vielen Fällen mit Hilfe des GALTON-Brettes auf mathematisch sehr einfache Weise lösen. Für eine gute Konvergenz des Verfahrens ist dabei erforderlich, daß das Potentialfeld nirgends ins Unendliche reicht.

Herrn Doz. PRACHAR, Herrn Dr. ZEMANEK und den Herren Dipl.-Ing. KOTTAS und FUCHS danke ich für ihre freundlichen Anregungen.

Literatur.

1. GILBERT W. KING, Further Remarks on Stochastic Methods in Quantum Mechanics. Proceedings IBM Computation Seminar, Dez. 49.

Die Deformation von Elektronen-Beugungsringen durch Linsenfehler.

Von

H. Grömm und J. Wagner.

(Aus der Forschungsstelle für Elektronenmikroskopie der T. H. Graz.)

Mit 6 Abbildungen.

(Eingelangt am 24. April 1954.)

Inhalt.

Die Einschaltung von Elektronenlinsen in den Strahlengang von Elektronen-Beugungseinrichtungen erlaubt es, gewisse günstige Effekte zu erzielen. Dafür hat man aber den Einfluß von Linsenfehlern in Kauf zu nehmen, die eine Deformation der Beugungsringe bewirken. Besonders stark tritt dabei der axiale Astigmatismus in Erscheinung. Die Deformation von Beugungsringen stellt ein bequem zu beobachtendes Anzeichen für diesen Linsenfehler dar.

1. Einleitung.

Bei modernen Elektronen-Beugungsgeräten schaltet man in den Strahlengang Elektronenlinsen ein, teils um den Maßstab der Beugungsringe zu ändern, teils um den chromatischen Fehler zu korrigieren¹. In einer solchen Anordnung kommen von der Objektfolie her konzentrische „Elektronenkegel“, durchsetzen die Linsen und fallen auf den Schirm. Durch den Einfluß der Linsenfehler kommt es zu einer Deformation der Kegelmäntel, die auf den Schirm „projiziert“ wird und sich in einer Verformung der Beugungsringe äußert. F. GRASENICK (Graz) hat uns darauf aufmerksam gemacht, daß man diese Erscheinung am handelsüblichen Elektronenmikroskop bequem beobachten kann. Dadurch wurde unsere Untersuchung angeregt und am Siemens-Übermikroskop ÜM 100 durchgeführt.

Bei ausgeschalteten Linsen und zentriertem Strahlengang erhält man das gewöhnliche Beugungsbild mit konzentrischen Ringen. Erregt man nun die Objektivlinse ein wenig, so ziehen sich die Beugungsringe in bekannter Weise zusammen und es zeigt sich eine Deformation der Ringe — in unserem Fall ist sie ovalförmig. Erhöht man

¹ Vgl. die Vorträge von R. BERNARD und M. SALVAT, sowie von E. RUSKA auf der 5. Jahrestagung der D. Ges. f. El.-Mikr. in Innsbruck (Sept. 1953).

die Durchflutung noch um ein geringes, so schreitet die Schrumpfung der Ringe fort und es treten Deformationen höherer Ordnung auf (Abb. 1). Bei weiterer Steigerung des Spulenstroms erscheint im

zentralen Fleck das Durchstrahlungsbild, das sich schnell ausbreitet und die Beugungsfigur überdeckt.



Abb. 1

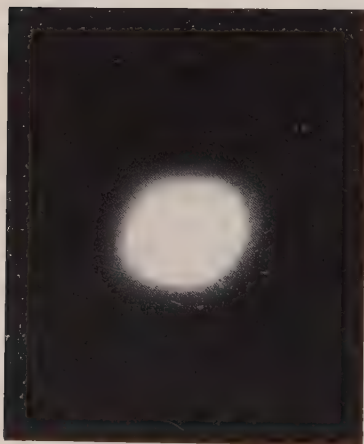


Abb. 2



Abb. 3

Unserer Meinung nach handelt es sich bei diesen Erscheinungen vornehmlich um die Wirkung des *axialen Astigmatismus*². Diese Auffassung wird unseres Erachtens durch folgenden Versuch bestätigt. Abb. 2 zeigt noch einmal die deformierten Beugungsringe. Nun wurde der Polschuh des Objektivs um etwa 90° gedreht. Wie Abb. 3 zeigt, dreht sich dabei die ganze Beugungsfigur³. Nachträgliches Zentrieren des Strahlenganges bewirkt kaum eine Veränderung. Die Deformation der Beugungsringe hängt also offensichtlich mit der Unrundheit des

Polschuhes, bzw. des Linsenfeldes zusammen.

² E. KOBERSTEIN (Diss. Graz 1952) hat auch bei ganz abgeschaltetem Linsensystem eine geringe Deformation der Beugungsringe gefunden und vermutet, daß es sich um eine Remanenz-Erscheinung handelt, bei der ebenfalls der axiale Astigmatismus im Spiele ist.

³ Zufolge der verschiedenen Exposition kommt die Gleichartigkeit der Beugungsbilder in der Wiedergabe nicht richtig zum Ausdruck.

Auf diese Weise ergibt sich ein leicht zu beobachtender Test auf axialem Astigmatismus. Wir können die Beugungskegel als genau definierte Elektronensonden auffassen, die das Linsenfeld durchsetzen. Ihre Schnittkurven mit dem Auffangsschirm berichten uns von den Symmetrieverhältnissen im Feld.

2. Berechnung der Deformation in erster Näherung.

Zunächst sollen nur Beugungskegel geringer Öffnung in Betracht gezogen werden, deren Spitze in der Nähe der optischen Achse liegt, und deren Achse mit der optischen Achse einen kleinen Winkel einschließt. Die Unrundheit des Linsenfeldes sei vorgegeben und es soll die sich einstellende Deformation der Beugungsringe in erster Näherung berechnet werden. Man könnte dabei auf die bekannten Arbeiten über die astigmatische Elektronenlinse⁴ zurückgreifen. Dort wird jedoch nur eine kleine elliptische Störung des Linsenfeldes berücksichtigt, während wir es hier im allgemeinen offenbar mit stärkeren und nichtsymmetrischen Einflüssen zu tun haben. Man könnte das Approximationsverfahren weitertreiben. Um die damit verbundene umfangreiche Rechenarbeit zu umgehen, kann man von folgenden Überlegungen ausgehen. Den Versuchsbedingungen entsprechend, kann die hinter dem Beugungspräparat liegende Objektivlinse als „schwach“ aufgefaßt werden (wir betrachten hier — als den allgemeineren Fall — nur die Magnetlinse. Die Übertragung auf die elektrische Linse liegt auf der Hand). Es wird also genügen, die Elektronenbahnen nach dem Parameter der Linsenstärke k^2 zu entwickeln und mit der ersten Ordnung von k^2 abubrechen. Bei guter Zentrierung wird ein bestimmter, herausgegriffener Beugungskegel die Linsenmitte annähernd längs eines konzentrischen Kreises durchsetzen. Ist nun das Linsenfeld unrund, so wird seine Brechkraft längs dieses Kreises variieren. Wir denken uns das Linsenfeld in einzelne tortenstückartige Sektoren zerlegt, innerhalb derer die Brechkraft als konstant angesehen werden kann. Eine herausgegriffene Bahn wird dann einen bestimmten Feldsektor (in dem konstante Brechkraft herrscht) durchsetzen. Wir können ihren Verlauf dann so berechnen, als ob sie zur Gänze in einem rotationssymmetrischen Feld eben dieser Brechkraft verlief. Voraussetzung ist dabei, daß sich die Bahn innerhalb des Feldes nicht zu stark weiterdreht. Das ist aber nach unseren Annahmen („schwache“ Linse) der Fall. Das besprochene Verfahren läuft also einfach darauf hinaus, die Bahnen wie im rotationssymmetrischen Feld zu behandeln, dabei aber den Parameter k^2 als Funktion des Azimuts der Meridianebene aufzufassen, in der das betrachtete Elektron das Linsenfeld durchsetzt.

Um den Fall, schiefer Beleuchtung mit zu umfassen, ist es vorteilhaft, das sogenannte „blendenfreie“ System zu benützen⁵. Abb. 4 veran-

⁴ W. GLASER, Z. Phys. **120**, 1 (1942) und „Grundlagen der Elektronenoptik“. Wien 1952.

⁵ W. GLASER, Öst. Ing.-Arch. **III**, 39 (1948) und W. GLASER und H. GRÜMM, Öst. Ing.-Arch. **VI**, 360 (1952).

schaulicht die Festlegung der Bahnen in diesem System. Der betrachtete Beugungskegel habe die Öffnung γ und gehe von der Stelle P_0 der Objektfolie aus. Die Achse des Beugungskegels sei durch die beiden Winkel ϑ und τ festgelegt. Mit diesen Bezeichnungen lauten die Paraxialbahnen⁵:

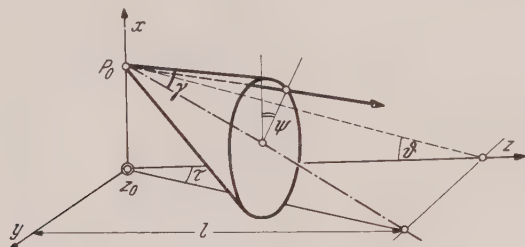


Abb. 4

$$\left. \begin{aligned} x(z) &= l \vartheta \cdot s(z) + (\gamma \cos \psi - \vartheta) \cdot t(z) \\ y(z) &= (\gamma \sin \psi + \tau - l \vartheta \theta_0') \cdot t(z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei bedeuten $s(z)$ und $t(z)$ zwei unabhängige Lösungen der paraxialen Bahndifferentialgleichung

$$\frac{d}{dz} (\sqrt{\Phi} r') + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} \left(\Phi'' + \frac{e}{2m} B_z^2 \right) r = 0 \quad (2)$$

und genügen den Anfangsbedingungen $s(z_0) = 1$, $s'(z_0) = 0$, $t(z_0) = 0$ und $t'(z_0) = 1$. Ferner gilt

$$\theta_0' = \sqrt{\frac{e}{8mU}} B_z(z_0) \quad (3)$$

Die Lösungen s und t können durch irgendein Näherungsverfahren, am besten durch Entwickeln nach der Linsenstärke k^2 aus der Bahndifferentialgleichung gewonnen werden. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Magnetfeld vom Typus des einfachen Glockenfeldes

$$B_z(z) = \frac{B_0}{1 + (z/d)^2} \quad (4)$$

sei, in dem sich (2) bekanntlich streng integrieren läßt⁶.

Die Entwicklung der entsprechenden Lösungen

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{d}{\sin \varphi_0 \sin \varphi} \frac{\sin \omega (\varphi_0 - \varphi)}{\omega} \\ s &= \sin \varphi_0 \frac{\cos \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi_0}{\omega} \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{mit } \frac{z}{d} = \text{ctg } \varphi \\ &\text{und } \omega = \sqrt{1 + k^2} \end{aligned} \quad (5)$$

⁶ W. GLASER, Z. Phys. **117**, 285 (1940).

ergibt

$$s(z) = 1 + k^2 \cdot f_1(z) \quad (6)$$

$$t(z) = z - z_0 + k^2 f_2(z)$$

mit

$$f_1 = \frac{z}{2d} \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{d} - \operatorname{arctg} \frac{z_0}{d} \right) + \frac{1}{2} \frac{z_0(z - z_0)}{d^2} \quad (6a)$$

$$f_2 = \frac{1}{2} (z_0 - z) + \frac{1}{2} d \left(1 + \frac{z z_0}{d^2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{z_0}{d} - \operatorname{arctg} \frac{z}{d} \right)$$

In Abb. 5 ist die Lösung $t(z)$ für den Fall $z_0 = -10d$ für verschiedene Werte des Parameters k^2 dargestellt (mit γ multipliziert, ergibt sich

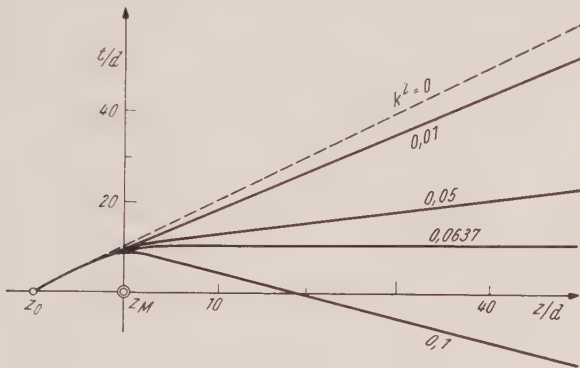


Abb. 5

daraus die Bahn für den Spezialfall $\vartheta = 0, \tau = 0$). Die kritische Linsenstärke für den Übergang Abbildung-Beugung ist angenähert $k^2 = -2d/\pi z_0 = 2d/\pi f_0$.

Die Schirm- oder Plattenebene befinde sich in $z = z_p$. Wenn wir $f_1(z_p) = a$ und $f_2(z_p) = b$ einführen, erhalten wir mit (1) und (6) die Durchstoßpunkte des Strahlenkegels mit der Schirmebene:

$$x_p = l \vartheta (1 + a k^2) + (z_p - z_0 + b k^2) (\gamma \cos \varphi - \vartheta) \quad (7)$$

$$y_p = (z_p - z_0 + b k^2) (\gamma \sin \varphi + \tau - l \vartheta \theta_0')$$

Die Linsenstärke k^2 ist vereinbarungsgemäß als Funktion des Azimuts φ aufzufassen. In der Regel wird die Unrundheit des Linsenfeldes nur geringfügig sein, so daß man mit einem kleinen Störungsparameter κ schreiben kann

$$k^2 = k_0^2 [1 + \kappa F(\kappa)] \quad (8)$$

Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß auch die Bilddrehung⁶

$$\theta(z_p) = k \left(\operatorname{arctg} \frac{z_p}{d} - \operatorname{arctg} \frac{z_0}{d} \right) = c \cdot k_0 \left[1 + \frac{1}{2} \kappa F(\varphi) \right] \quad (9)$$

über k von φ abhängt.

Im einfachsten Fall stimmt die Achse des Beugungskegels mit der Feldachse überein ($\vartheta = 0$, $\tau = 0$). Mit (7) und (9) erhalten wir

$$r_p = (z_p - z_0 + b k^2) \gamma; \quad \theta_p = c \cdot k \quad (10)$$

Bei ganz ausgeschalteter Linse ($k^2 = 0$) ergeben sich die gewöhnlichen Beugungsringe mit dem Radius $r_0 = \gamma (z_p - z_0)$. Es gilt also bei eingeschalteter Linse

$$r_0 - r_p = -\gamma b \cdot k^2(\psi); \quad \theta_p = c \cdot k \quad (11)$$

Wenn wir für den Augenblick von der Bilddrehung absehen, zeigt (11), daß der Abstand zwischen ursprünglichem und deformiertem Beugungsring (gemessen in radialer Richtung) der Linsenstärke proportional ist.

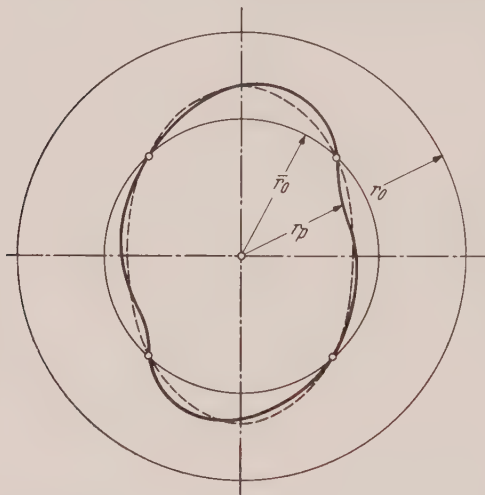


Abb. 6

Die Abhängigkeit der letzteren vom Azimut spiegelt sich also in der Winkelabhängigkeit von $r_0 - r_p$ wieder. Hierin liegt eine Möglichkeit, die Linsenstärke k^2 — auch in Abhängigkeit vom Achsenabstand — zu messen.

Die Bilddrehung (9) wirkt in zweifacher Hinsicht. Der erste Summand bedeutet eine Drehung der deformierten Beugungsfigur als ganzes. Der zweite hat eine weitere, von ψ abhängige Verzerrung der Beugungsfigur zur

Folge. Setzt man z. B. im einfachsten Fall $F(\psi) = \cos 2\psi$, so bewirkt (11) die Deformation der Beugungsringe annähernd zu Ellipsen, während (9) eine charakteristische Zerdrehung zur Folge hat, die in Abb. 6 schematisch dargestellt ist.

Es ist auch möglich, von den photographisch vorliegenden deformierten Beugungsringen auf die Winkelabhängigkeit von k^2 näherungsweise zurückzuschließen, indem man sich der Beziehung (11) bedient. Allerdings gehört das für eine bestimmte Richtung $\psi = \text{const.}$ ermittelte k^2 zu einem etwas anderen Azimut, dessen Abweichung von ψ mit Hilfe von (9) ermittelt werden kann.

Ist das Bündel nicht zentriert ($\vartheta \neq 0$, $\tau \neq 0$), so treten weitere Deformationen auf, die sich nach (7) bestimmen lassen⁷. Ist die Linse nicht astigmatisch ($k^2 \neq k_0^2$), dann bleiben die Beugungsringe in erster Näherung auch bei Dezentrierung Kreise, doch ist ihr Ursprung gegenüber dem zentrierten Fall etwas verschoben.

⁷ Die Abb. 1 bis 3 wurden bei möglichst guter Zentrierung hergestellt.

3. Einfluß der Linsenaberrationen dritter Ordnung.

In der Praxis kann man die Deformation der Beugungsringe als Indiz für den axialen Astigmatismus verwenden (Justierung des Stigmators usw.). Dabei dürfte man mit den Gesetzen erster Ordnung auskommen. Bei weiter geöffneten Kegeln hat man Linsenaberrationen dritter Ordnung zu berücksichtigen. Ihre Größenordnung soll kurz diskutiert werden.

Für gewöhnlich betrachtet man die Elektronenlinse im stärker erregten Arbeitsbereich, in dem sie *abbildend* wirkt. Es gibt dann eine definierte GAUSSsche Bildebene $z = z_1$ und man kann sich bei der Auswertung der Fehlerintegrale der Abbildungsgleichung bedienen. In unserem Fall existiert keine bestimmte Bildebene, sondern nur eine an beliebiger Stelle liegende „Plattenebene“ $z = z_p$. Bei der Herleitung der Aberrationskoeffizienten dürfen wir also keinen Bezug auf eine GAUSSsche Bildebene nehmen.

Zweckmäßigerweise bestimmt man zunächst die Glieder vierter Ordnung des gemischten Eikonals $T_4 = T_4(x_0, y_0, \alpha_p, \beta_p)$, wobei unter α_p und β_p die Strahlrichtungen in der Ebene $z = z_p$ zu verstehen sind. Mit Hilfe der Beziehungen

$$\Delta x_p = -\frac{\partial}{\partial \alpha_p} \left(\frac{1}{p} T_4 \right); \quad \Delta y_p = -\frac{\partial}{\partial \beta_p} \left(\frac{1}{p} T_4 \right) \quad (12)$$

kann man die Strahlabweichungen in $z = z_p$ ermitteln. In die erhaltenen Beziehungen führen wir nun neue Strahlparameter $x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0$ ein⁸ und bekommen so (bei $y_0 = 0$)

$$\Delta x_p = B_r \alpha_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + [F_r (3\alpha_0^2 + \beta_0^2) + 2f_r \alpha_0 \beta_0] x_0 + \\ + [(2C_r + D_r) \alpha_0 + c_r \beta_0] x_0^2 + E_r x_0^3 \quad (13)$$

$$\Delta y_p = B_r \beta_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + [2F_r \alpha_0 \beta_0 + f_r (3\beta_0^2 + \alpha_0^2)] x_0 + \\ + (D_r \beta_0 + c_r \alpha_0) x_0^2 + e_r x_0^3 \quad (13)$$

Es zeigt sich dabei — und dieses Ergebnis war von vorneherein zu erwarten —, daß die Größen $B_r, \dots, e_r$ die gleiche Gestalt haben, wie die entsprechenden Koeffizienten bei der *Abbildung* im blendenfreien System⁹, nur daß an die Stelle der Vergrößerung V der Ausdruck $\sqrt{\Phi_0} t_p' / \sqrt{\Phi_p}$ tritt und daß als obere Integrationsgrenze statt z_1 der Ort der Einstellebene z_p zu nehmen ist.

Die Auswertung der Aberrationsintegrale kann unter der Voraussetzung einer schwachen Linse angenähert leicht erfolgen, indem man die Lösungen $s(z)$ und $t(z)$ durch Geradenstücke approximiert. Hier seien die Aberrationskoeffizienten nur für die weitere Einschränkung

⁸ Vgl. ⁵. Der Kürze halber betrachten wir hier nur den symmetrischen Fall ($\vartheta = 0, \tau = 0$).

⁹ Vgl. W. GLASER, Grundlagen der Elektronenoptik, Wien 1952, S. 413 ff. Aus Raumgründen geben wir die betreffenden Integralausdrücke hier nicht wieder.

mitgeteilt, daß die Linse auch als „kurz“ aufgefaßt werden kann. In diesem Falle schafft man durch eine partielle Integration die Ableitungen von $s(z)$ und $t(z)$ fort¹⁰ ersetzt im Linsenfeld s durch 1 und t durch $-z_0$ und erstreckt die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$. Es ergibt sich für das Feld (4)

$$B_r = \frac{z_0^4 k^2 \pi}{12 d^3 t_p'} \left(5k^2 + \frac{3}{2} \right); \quad C_r = \frac{k^2 \pi}{12 d t_p'} \left[\frac{z_0^2}{d^2} (5k^2 + 3/2) - 4 \right]$$

$$D_r - C_r = \frac{\pi k^2}{d t_p'}; \quad F_r = -\frac{z_0^3 k^2 \pi}{12 d^3 t_p'} \left(5k^2 + \frac{3}{2} \right); \quad (14)$$

$$E_r = -\frac{z_0 k^2 \pi}{12 d^3 t_p'} \left(5k^2 + \frac{3}{2} \right)$$

$$t_r = \frac{3 z_0^2 k^3 \pi}{8 d^2 t_p'}; \quad c_r = -\frac{3 z_0 k^3 \pi}{4 d^2 t_p'}; \quad e_r = \frac{3 k^3 \pi}{8 d^2 t_p'}$$

Bei „Abbildung“ statt „Beugung“ ist in den Beziehungen (14) an Stelle von t_p' einfach $1/V$ einzuführen¹¹.

Wählen wir wie bei dem in Abb. 7 dargestellten Beispiel $z_0 = -10 d$ und setzen wir für $k^2 = 10^{-2}$, so ergibt sich angenähert $B_r = 41 d$. Bei einer Apertur von $\gamma = 5 \cdot 10^{-2}$ erhalten wir mit (10) und (13) in der Einstellebene $z_p = 10^2 d$ die Abweichung

$$r_0 - r_p = (78,45 - 0,51) \cdot 10^{-2} d \quad \text{bei} \quad r_0 = 5 d \quad (15)$$

Der zweite Summand ist dabei der Beitrag des Öffnungsfehlers. Wie man sieht, treten die Fehler dritter Ordnung nicht sehr stark in Erscheinung.

¹⁰ Vgl. ⁹, S. 415.

¹¹ Die Bildfehlerausdrücke werden besonders einfach im System mit Blende. Man gelangt dazu (14), indem man sich der Transformationen ⁹, S. 411, Gl. (120, 6—7) bedient. Es ergibt sich

$$B_a = -\frac{z_0 k^2 \pi}{12 d^3} \left(5k^2 + \frac{3}{2} \right); \quad C_a = -\frac{1}{2} D_a = \frac{2 k^2 \pi}{3 z_0 d}; \quad f_a = \frac{3 \pi k^3}{8 d^2}$$

$$E_a = 0; \quad F_a = 0; \quad c_a = 0; \quad e_a = 0.$$

Zur wellenmechanischen Theorie der elektronenoptischen Abbildung I.

Von

Walter Glaser und Günther Braun, Wien.

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 21. Mai 1954.)

Zusammenfassung.

Es wird in Analogie zur Wellenoptik die der SCHRÖDINGERSchen Wellengleichung genügende Wellenfunktion $\psi(z, x, y)$ aus ihren Werten in einer vorgegebenen Ebene $z = z_0$ mit Hilfe des GREENSchen Integralsatzes bestimmt (verallgemeinerte KIRCHHOFFsche Formel); für die GREENsche Funktion dieses ersten Randwertproblems der SCHRÖDINGERSchen Wellengleichung werden mit Hilfe des Spiegelungsprinzips und eines Ansatzes, der zum bekannten W-K-B-Verfahren der Wellenmechanik analog ist, für $\hbar \rightarrow 0$ asymptotische Reihen abgeleitet.

Zur Auswertung der sich ergebenden Beugungsintegrale wird die Methode der stationären Phase angewendet und es werden die Ergebnisse der mathematischen Theorie der Methode der stationären Phase angegeben. Ferner wird die geometrisch-optische Bedeutung der Punkte stationärer Phase der Beugungsintegrale aufgezeigt, die Berechnung angegeben, die Zahl der Lösungen diskutiert und der Zusammenhang mit der geometrischen Elektronenoptik und der Wellenmechanik dargestellt. Es wird gezeigt, wie sich die wellenmechanische Elektronenoptik organisch an die geometrische Elektronenoptik anschließt und wie die Lösung des Beugungsproblems durch mit $\hbar \rightarrow 0$ asymptotische Reihen (halbklassische Lösung) den Zusammenhang zwischen geometrischer Elektronenoptik und wellenmechanischer Elektronenoptik herstellt. Es wird schließlich die physikalische Bedeutung der Methode der stationären Phase diskutiert.

Einleitung.

Die folgende Arbeit befaßt sich mit der wellenmechanischen Theorie der elektronenoptischen Abbildung.

Wenn wir annehmen, daß auf Grund der Ergebnisse der allgemeinen Streuungstheorie die Wellenfunktion unmittelbar hinter der Objektebene bekannt ist, so besteht die Grundaufgabe der Elektronenoptik darin, für ein gegebenes elektrisch-magnetisches Abbildungsfeld aus dieser Wellenfunktion in der „Objektebene“ die Wellenfunktion in jeder anderen Einstellebene zu bestimmen. Daraus kann nach bekannten

Für die Funktionen $\psi(P)$ und $G(P, P_1)$ sind derartige Grenzbearbeitungen im Unendlichen (für $R \rightarrow \infty$) zu wählen, daß $J_2 = 0$ wird. (Ausstrahlungsbedingung.) Da es aus physikalischen Gründen immer möglich ist, sowohl $G(P, P_1)$ (laut Voraussetzung) als auch $\psi(P)$ (wegen der physikalischen Bedeutung der den Abbildungsvorgang vermittelnden Elektronenströmung) so zu wählen, daß sie auf H ausstrahlende Elektronenströmungen darstellen und wegen des Satzes von der Erhaltung der Teilchenzahl für derartige Elektronenströmungen die Integrale

$$\int \varrho v d\tau$$

mit $R \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Wert konvergieren, verschwindet J_2 .

Denn die SCHRÖDINGER-Gleichung ist eine Zusammenfassung der Aussagen der verallgemeinerten HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung und des Satzes von der Erhaltung der Teilchenzahl und das angeschriebene Integral, in dem ϱ die Teilchendichte und v die Teilchengeschwindigkeit bedeutet, stellt den analytischen Ausdruck für die in der Zeiteinheit durch eine gewisse Fläche strömende Teilchenzahl dar. Wenn man für ϱ und v die Werte einsetzt, die den durch $G(P, P_1)$, bzw. $\psi(P)$ dargestellten Elektronenströmungen entsprechen und das Integral über $(H + E_0)$, bzw. (H) erstreckt, so stellen diese Integrale das erstmal die Quellstärke der durch $G(P, P_1)$ dargestellten Elektronenströmung, das zweitemal die durch (E_0) in der Zeiteinheit einströmende Elektronenanzahl [da $\psi(P)$ in τ überall regulär, also die ψ -Strömung dort quellenfrei ist] dar, also eine endliche Größe. Im ersten Fall konvergiert natürlich auch

$$\int_H \varrho v d\tau$$

gegen einen endlichen Wert. Dies bedeutet aber, daß G und ψ auf H ausstrahlende Strömungen gewisser fester Teilchenzahl sind. Da mit $R \rightarrow \infty$ v gegen eine endliche Größe gehen muß, muß in beiden Fällen $\varrho = a^2$ wie $1/R^2$, daher a und damit G und ψ wie $1/R$ gegen Null gehen. Durch Einsetzen in (1,10) erkennt man leicht, daß $J_2 = 0$ wird.

Derartige Strömungsfelder entsprechen genau den durch technisch realisierbare Abbildungsfelder verwirklichten Elektronenströmungen. Wenn nämlich, wie dies bei allen praktischen Anordnungen immer zutrifft, sämtliche felderzeugenden Ströme und Ladungen im Endlichen liegen, geht für $R \rightarrow \infty$ $\mathfrak{A}(z, x, y) \rightarrow 1/R$, $\varphi(z, x, y) \rightarrow \varphi_\infty$ die SCHRÖDINGER-Gleichung asymptotisch in die gewöhnliche Wellengleichung

$$\hbar^2 \Delta \psi + p_\infty^2 \cdot \psi = 0; \quad p_\infty = (2 e m \varphi_\infty)^{1/2} \quad (1,12)$$

über, so daß man für großes R asymptotisch schreiben kann:

$$\psi = \frac{1}{R} e^{(i\phi_\infty R)/\hbar} \sum_{K=0} A_K(\vartheta, \varphi) \frac{1}{R^K}, \quad (1,13)$$

$$G = \frac{1}{R} e^{(i\phi_\infty R)/\hbar} \sum_{K=0} B_K(\vartheta, \varphi) \frac{1}{R^K} \quad (1,14)$$

wobei R, ϑ, φ Kugelkoordinaten mit $z_0, 0, 0$ als Ursprung sind; die technisch verwendeten Anordnungen ergeben somit genau das geforderte asymptotische Verhalten.

Wir berechnen die Größe J_1 . Da nach Voraussetzung G sich für kleine r wie $1/r$, $\partial G/\partial r$ wie $1/r^2$ verhält, und $\psi(P)$ regulär ist, gibt zu J_1 nur der zweite Term von (1,9) einen Beitrag von der Größe

$$J_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_K \psi(P) \frac{\partial G(P, P_1)}{\partial r} r^2 d\Omega_K = \psi(P_1) \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_K \frac{\partial G}{\partial r} r^2 d\Omega_K. \quad (1,15)$$

Da (1,1) linear und homogen ist, können wir G so normieren, daß gilt:

$$-\lim_{r \rightarrow 0} \int_K \frac{\partial G}{\partial r} r^2 d\Omega_K = 1; \quad J_1 = -\psi(P_1). \quad (1,16)$$

Zur eindeutigen Festlegung von $G(P, P_1)$ müssen wir noch die Randwerte von $G(P, P_1)$ für die Punkte $P = P_0$ der Ebene E_0 vorschreiben. Wir verlangen

$$G(P_0, P_1) = 0, \quad (1,17)$$

was nach bekannten Sätzen über partielle Differentialgleichungen immer möglich ist. Durch Eintragen dieser Werte erhält man schließlich das Ergebnis

$$\psi(P_1) = \int_{E_0} \psi_0(x_0, y_0) \frac{\partial G(P, P_1)}{\partial z} \Big|_{P=P_0} dx_0 dy_0. \quad (1,18)$$

Zur Lösung des durch (1,1) und (1,2) definierten Randwertproblems genügt es also, die GREENSche Funktion $G(P, P_1)$, die den Bedingungen (1,8), (1,16) und (1,17) genügt, aufzusuchen. Durch (1,18) wird ψ im Halbraum $z \geq z_0$ aus der gegebenen Verteilung $\psi_0(x_0, y_0)$ in der Ebene E_0 und dem vorgegebenen Abbildungsfeld, das in die Größe $\partial G/\partial z$ eingeht, bestimmt.

Aus (1,18) kann man sogleich einen wichtigen Satz über den Gruppencharakter der durch die Integraltransformation (1,18) vermittelten „Abbildung“ erkennen. Für Transformationen der Art (1,18) gilt nämlich die Gruppeneigenschaft. Die Hintereinanderschaltung zweier derartiger Abbildungen ergibt wieder eine Abbildung, die formal die gleiche Gestalt hat wie (1,18). Wir denken uns hintereinander die Abbildungen $\psi(P_0) \rightarrow \psi(P_B)$ und $\psi(P_B) \rightarrow \psi(P_1)$ ausgeführt. Es muß also gezeigt werden, daß die im gesamten erzeugte Abbildung $\psi(P_0) \rightarrow (\psi(P_B) \rightarrow \psi(P_1))$ gleich ist der direkt erzeugten Abbildung $\psi(P_0) \rightarrow \psi(P_1)$. Mit der Festsetzung $z_B > z_0$, $z_1 \geq z_B$ (was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet) wenden wir (1,18) zweimal an:

$$\psi(P_B) = \int_{\vec{E}_0} \frac{\partial G(P_0, P_B)}{\partial z_0} \psi(P_0) df_0, \quad (1,19)$$

$$\psi(P_1) = \int_{\vec{E}_B} \frac{\partial G(P_B, P_1)}{\partial z_B} \psi(P_B) df_B. \quad (1,20)$$

Die Abbildung $\psi(P_0) \rightarrow \psi(P_1)$ wird daher durch die Gleichung

$$\psi(P_1) = \int_{\vec{E}_0} \psi(P_0) \int_{\vec{E}_B} \frac{\partial G(P_B, P_1)}{\partial z_B} \cdot \frac{\partial G(P_0, P_B)}{\partial z_0} df_B df_0 \quad (1,21)$$

beschrieben. Damit (1,18) und (1,21) für alle $\psi(P_0)$, $\psi(P_1)$ übereinstimmen, muß

$$\frac{\partial G(P_0, P_1)}{\partial z_0} = \int_{\vec{E}_B} \frac{\partial G(P_B, P_1)}{\partial z_B} \cdot \frac{\partial G(P_0, P_B)}{\partial z_0} df_B \quad (1,22)$$

gelten. Diese Gleichung ist aber sicher erfüllt, denn für ein beliebiges $\bar{P}(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y})$ mit $\bar{z} < z_B$ muß

$$G(\bar{P}, P_1) = \int_{\vec{E}_B} \frac{\partial G(P_B, P_1)}{\partial z_B} G(\bar{P}, P_B) df_B \quad (1,23)$$

sein, was unmittelbar aus (1,20) durch Vertauschen $\psi(P_B) \rightarrow G(\bar{P}, P_B)$ folgt. Dies ist zulässig, da $G(\bar{P}, P_1)$ sämtliche für $\psi(P_1)$ verlangten Bedingungen erfüllt (insbesondere für alle $\bar{z} < z_B$ endlich und stetig ist). Da also (1,23) identisch für alle $\bar{P}$ mit $\bar{z} < z_B$ gilt, kann man nach $\bar{z}$ differenzieren und erhält (1,22), wenn man wieder statt $\bar{P}$ P_0 schreibt, w. z. b. w.

Der eben bewiesene Satz, der allein aus den Bedingungen (1,8) etc. für ψ und G folgte, kann natürlich auch bewiesen werden, wenn E_0 durch eine beliebige geschlossene Hüllfläche, die P_1 umschließt, ersetzt wird.

Wenn (1,18) asymptotisch für $\hbar \rightarrow 0$ gelöst wird, wie es die Aufgabe dieser Arbeit sein wird, dann ist mit (1,18) gleichzeitig (1,23) und damit (1,22) asymptotisch gelöst. Wenn daher angenommen werden kann, daß die in § 2 abzuleitende Reihe asymptotische Lösung für $G(P, P_1)$ ist, dann ist damit auch gleichzeitig das asymptotische Gelten der Gruppeneigenschaft (1,22) nachgewiesen.

Diese Gruppeneigenschaft hat für die Anwendung auf die wellenmechanische Theorie der Elektronenoptik folgende bedeutsame Konsequenz. Es können, wie ausführlich gezeigt werden wird, für $G(P_0, P_1)$

bzw. $\frac{\partial G(P_0, P_1)}{\partial z_0}$ nur Ausdrücke angegeben werden, die für $z_0 \leq z_1 < \bar{z}_0$

eindeutig und regulär sind, wobei $\bar{P}_0(\bar{z}_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ der zum Punkt P_0 konjugierte Punkt des nach § 2 dem wellenmechanischen Problem zugeordneten klassisch-mechanischen Problems (der geometrischen Elek-

tronenoptik) ist. Wir kennen demnach für $\frac{\partial G(P_0, P_1)}{\partial z_0}$ nur bis zur Kaustikfläche des Punktes P_0 eine reguläre und eindeutige Darstellung. Um $\psi(P)$ für ein $z_1 \geq \bar{z}_0$ zu bestimmen, kann man nach obigem eine Zwischenebene $z_B < \bar{z}_0$ einführen, $\psi(P_B)$ bestimmen und dann das Verfahren ein zweitesmal anwenden, wobei die Lage der Zwischenebene in die asymptotische Lösung nicht eingehen darf. [Unter der angegebenen Voraussetzung für $G(P, P_1)$, die nachzuweisen wäre, was hier nicht durchgeführt wird.]

§ 2. Aufstellung der Greenschen Funktion.

Wir können die GREENSche Funktion, die den Bedingungen (1,8), (1,16) und (1,17) genügt, am besten mit Hilfe des Spiegelungsprinzips herleiten, da nach (1,17) $G(P_0, P_1)$ für alle P_1 verschwinden soll ($P_0(z_0, x_0, y_0)$); da das durch (1,1) und (1,2) definierte Randwertproblem nur für den Halbraum $z \geq z_0$ gelöst werden soll, kann man für $z < z_0$ das elektrische und magnetische Feld in geeigneter Weise symmetrisch fortsetzen. Wir machen den Superpositionsansatz

$$G(P, P_1) = G_s(P, P_1) + G_r(P, P_1). \quad (2,1)$$

$G_s(P, P_1)$ soll für $z \geq z_0$ (1,8) und (1,16) erfüllen, aber nicht (1,17), soll also für alle Punktepaare P, P_1 ($P \neq P_1$) des Halbraumes $z \geq z_0$ regulär sein, für $P = P_1$ singulär. Die Bedingung (1,17) wird durch $G_r(P, P_1)$ erzwungen. $G_r(P, P_1)$ soll im ganzen Raum (1,8) erfüllen und für alle Punkte P des Halbraumes $z \geq z_0$ regulär sein.

Damit die Bedingung (1,17) erfüllt ist, müssen wir zwei Elektronenströmungen überlagern, die bezüglich der Ebene $z = z_0$ dermaßen symmetrisch sind, daß

$$G(P_0, P_1) = G_s(P_0, P_1) + G_r(P_0, P_1) = 0 \quad (2,2)$$

ist; da für $z < z_0$ noch keine Bedingungen für das elektrische und magnetische Feld vorliegen, diese nur für $z = z_0$ stetig ineinander übergehen müssen, kann man setzen:

$$\varphi(2z_0 - z, x, y) = \varphi(z, x, y); \quad \mathfrak{A}(2z_0 - z, x, y) = \mathfrak{A}(z, x, y). \quad (2,3)$$

Nach (1,16) stellt $G_s(P, P_1)$ in der Umgebung von P_1 eine Quellströmung dar; entsprechend dem Spiegelungsprinzip nehmen wir eine zu $P_1(z_1, x_1, y_1)$ in bezug auf die Ebene $z = z_0$ spiegelsymmetrische Quelle gleicher Quellstärke im Punkte $\bar{P}_1(2z_0 - z_1, x_1, y_1)$ an und setzen

$$G_r(P, P_1) = -G_s(P, \bar{P}_1). \quad (2,4)$$

Aus der Symmetrie der Anordnung folgt:

$$G_s(P, P_1) = G_s(\bar{P}, \bar{P}_1), \quad (2,5)$$

wobei $\bar{P}(2z_0 - z, x, y)$ der zu $P(z, x, y)$ in bezug auf die Ebene $z = z_0$ spiegelsymmetrisch gelegene Punkt ist. Insbesondere wird $G_s(\bar{P}, \bar{P}_1)$ in $\bar{P}_1$ in gleicher Weise singulär wie $G_s(P, P_1)$ in P_1 , nach (2,4) hat also $G_r(P, P_1)$ in $\bar{P}_1$ eine Quelle gleicher Quellstärke wie $G_s(P, P_1)$ in P_1 . Die gegenseitige Lage der Punkte $P, P_1, \bar{P}, \bar{P}_1$ ist in Abb. 2 dargestellt.

(2,5) drückt einfach die Tatsache aus, daß die symmetrische Anordnung zweier Quellen gleicher Quellstärke im „gleichen Feld“ symmetrische Elektronenströmungen ergeben muß. Aus (2,4) und (2,5) folgt, daß für den Punkt $P = \bar{P} = P_0 (P_0(z_0, x_0, y_0))$ (2,2) erfüllt ist. Die so konstruierte GREENSche Funktion genügt also der Bedingung (1,17).

Aus der Symmetrie bezüglich der Ebene $z = z_0$ folgt ferner mit der Abkürzung $\bar{z} = 2z_0 - z$ und beim Vertauschen $P \rightarrow \bar{P}, \bar{P} \rightarrow P$

$$G_s(\bar{P}, P_1) = G_s(P, \bar{P}_1). \quad (2,6)$$

Für die Funktion $G_s(P, P_1)$, die der konjugiert-komplexen SCHRÖDINGER-Gleichung (1,8) genügen muß, machen wir nach WENTZEL KRAMERS-BRILLOUIN den Ansatz:

$$G_s(P, P_1) = a(P, P_1) e^{-\frac{i}{\hbar} S(P, P)} \quad (2,7)$$

Wir setzen den Ansatz (2,7) in (1,8) ein. Wegen

$$\nabla G_s = \left(\nabla a - a \frac{i}{\hbar} \nabla S \right) e^{-\frac{i}{\hbar} S}$$

und

$$\Delta G_s = \left[\Delta a - a \frac{i}{\hbar} \Delta S - \frac{2i}{\hbar} \nabla a \nabla S + a \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 (\nabla S)^2 \right] e^{-\frac{i}{\hbar} S}$$

erhalten wir die Gleichung

$$e^{-\frac{i}{\hbar} S} \{ -\hbar^2 \Delta a + a [(\nabla S + e \mathfrak{A})^2 - 2 e m \varphi] + a i \hbar \Delta S + 2 i \hbar \nabla a (\nabla S + e \mathfrak{A}) \} = 0. \quad (2,8)$$

Sämtliche Ableitungen sind nach den Koordinaten des Punktes P durchzuführen.

Da die SCHRÖDINGERSche Wellengleichung, wie bereits in § 1 ausgeführt, eine Zusammenfassung der verallgemeinerten HAMILTON-JACOBI-schen Differentialgleichung und des Satzes von der Erhaltung der Teilchenzahl ist, können die Gln. (1,1) und (2,8) nur in denjenigen Raumpunkten gelten, in denen keine Quellen der Elektronenströmung vorhanden sind; in den Quell- und Senkpunkten ist die SCHRÖDINGERSche Wellengleichung zu verallgemeinern, wie dies leicht mit Hilfe der DIRACschen Deltafunktion durchgeführt werden kann. Es gilt z. B. für eine Quelle der Quellstärke 1 im Punkt $P_1(z_1, x_1, y_1)$

$$\Pi^* G_s = \hbar^2 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(z - z_1). \quad (2,9)$$

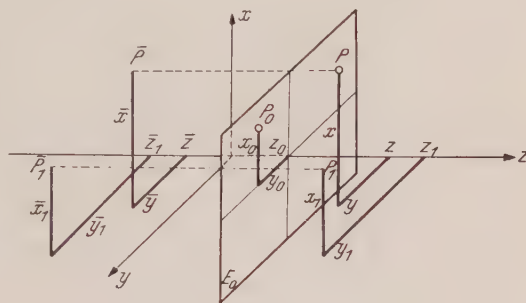


Abb. 2. Zur Herleitung der GREENSchen Funktion.

Man sieht sofort, daß für $P \neq P_1$ $\Pi^* G_s = 0$, für $P = P_1$ $\Pi^* G_s = \infty$ ist, wie es für G_s per definitionem sein muß.

Für einen genaueren Beweis von (2,9) hätte man diese Gleichung über ein den Punkt P_1 umschließendes Gebiet τ zu integrieren (z. B. eine Kugel vom Radius r_1 um P_1), die einzelnen Teilintegrale etwa mit Hilfe des GAUSSSchen Integralsatzes und Anwendung von (1,16) auszurechnen und dann das Integrationsgebiet τ auf den Punkt P_1 zusammenzuziehen.

Die Gl. (2,8) gilt daher nur mit Ausnahme des Punktes $P = P_1$.

Wenn man die Größe $a(P, P_1)$ als komplex betrachtet, ist der Ansatz (2,7) natürlich nicht eindeutig, wird erst eindeutig durch passend zu wählende Zusatzbedingungen. Da (2,8) als komplexe Gleichung zwei reellen Gleichungen oder einer reellen und einer komplexen Gleichung entspricht, ist bei reellem S genau eine Zusatzbedingung möglich. Wir können diese Zusatzbedingung so wählen, daß S und a möglichst einfach bestimmt werden können. Wenn wir verlangen, daß S der HAMILTON JACOBISCHEN Differentialgleichung

$$(\nabla S + e \mathfrak{A})^2 = 2 e m \varphi \quad (2,10)$$

des klassisch mechanischen Problems genügt, muß $a(P, P_1)$ eine komplexe Größe sein; durch diese Wahl werden vorteilhaft die Differentialgleichungen für S und a in den abhängigen Variablen entkoppelt. Wenn man zuerst aus (2,10) S bestimmt, so ist dann bei bekanntem S die Gleichung

$$a i \Delta S + 2 i \nabla a (\nabla S + e \mathfrak{A}) = \hbar \Delta a, \quad (2,11)$$

der $a(P, P_1)$ genügen muß, eine Differentialgleichung in a allein.

$S(P_1, P)$ stellt das Punkt-Punkteikonal mit P_1 als Anfangspunkt und P als Endpunkt dar. Es gilt die Darstellung

$$S(P_1, P) = \int_{P_1}^P (2 e m \varphi ds - e \mathfrak{A} \cdot d\mathbf{x}), \quad (2,12)$$

wobei über die von P_1 nach P führende Elektronenbahn zu integrieren ist und die Bogenlänge von P_1 nach P positiv gezählt wird.

Wenn man die Gln. (1,1), bzw. (2,11) durch $\hbar^2$, bzw. $\hbar$ dividiert, lauten sie:

$$\Delta \psi + \frac{2 e i}{\hbar} \mathfrak{A} \nabla \psi + \frac{2 e m \varphi - e^2 \mathfrak{A}^2}{\hbar^2} \psi = 0, \quad (2,13)$$

$$\Delta a - \frac{2 i}{\hbar} (\nabla S + e \mathfrak{A}) \nabla a - \frac{i}{\hbar} i \Delta S \cdot a = 0. \quad (2,14)$$

Ein Vergleich von (2,13) und (2,14) zeigt die Bedeutung des W-K-B-Verfahrens; wie man sich durch einen rein formalen Ansatz überzeugen kann, ist eine Reihenentwicklung nach positiven Potenzen von $\hbar$ rein formal wohl für a möglich, aber nicht für ψ . Die Abspaltung des Faktors $e^{-\frac{i}{\hbar} S(P_1, P)}$, die den „Wellencharakter“ der Differentialgleichung ausdrückt, ist also notwendig, um die Größe $a(P, P_1)$ formal in eine Reihe

nach positiven Potenzen von $\hbar$ entwickeln zu können. Der Ansatz (2,7) erscheint somit als Analogon zur Grundlösung $(1/r) e^{i k r}$ der gewöhnlichen Wellengleichung.

Für alle $P \neq P_1$ machen wir den Ansatz

$$a(P, P_1) = \sum_{k=0} a_k(P, P_1) \cdot \hbar^k. \quad (2,15)$$

Durch Einsetzen in (2,11) erhält man die Rekursionen:

$$\nabla \{a_0^2 (\nabla S + e \mathfrak{A})\} = 0, \quad (2,16)$$

$$i \Delta S a_k + 2 i \nabla a_k (\nabla S + e \mathfrak{A}) = \Delta a_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (2,17)$$

für $P \neq P_1$.

Zur Lösung von (2,16), (2,17) ordnen wir (2,10) in bekannter Weise eine Strömung mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$m \mathbf{v} = m \mathbf{v} s = (\nabla S + e \mathfrak{A}) \quad (2,18)$$

zu³. Die Stromlinien dieser Strömung sind identisch mit den Elektronenbahnen der geometrisch-optischen Elektronenbewegung. (2,18) entspricht einer von P_1 nach P gehenden Elektronenströmung. Es gelten dann die Gleichungen

$$\nabla a_k (\nabla S + e \mathfrak{A}) = m \mathbf{v} s \cdot \nabla a_k = \frac{da_k}{ds} |\nabla S + e \mathfrak{A}|, \quad (2,19)$$

wobei $da_k/ds = s \cdot \nabla a_k$ die Ableitung von $a_k(P, P_1)$ in Richtung der von P_1 nach P führenden Elektronenbahn ist. (2,17) erhält damit die Gestalt

$$2 i \frac{da_k}{ds} |\nabla S + e \mathfrak{A}| + i a_k \Delta S = \Delta a_{k-1}. \quad (2,20)$$

Für die Koordinaten des Punktes $P(z, x, y)$ setzen wir die der geometrisch-optischen Bahn von P_1 nach P mit der Bogenlänge von P_1 nach P als Parameter ein: $\dots z(s), x(s), y(s) \dots$. Es sind dann die Koeffizienten der Differentialgleichung (2,20) nur mehr Funktionen von s und (2,20) kann als gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung durch Variation der Konstanten gelöst werden.

Wir normieren die Lösung so, daß mit $P \rightarrow P_1$ alle $a_k(P, P_1) = 0$ werden für $k \geq 1$. Wenn wir mit einer beliebigen Konstanten C

$$\bar{a}_0(P, P_1) = C e^{-\frac{1}{2} \int_{P_1}^P \frac{\Delta S(P_1, P(s)) ds}{|\nabla S(P_1, P(s)) + e \mathfrak{A}(P(s))|}} \quad (2,21)$$

setzen, erhalten wir die Lösung

$$a_k(P, P_1) = -\frac{i}{2} \bar{a}_0(P, P_1) \int_{P_1}^P \frac{\Delta a_{k-1}(P(s), P_1) ds}{|\nabla S(P_1, P(s)) + e \mathfrak{A}(P(s))| \bar{a}_0(P(s), P_1)}. \quad (2,22)$$

³ E.O. XXIX, Abschn. 163, S. 590 ff.

Dabei bedeutet $P(s) = P(z(s), x(s), y(s))$ den Integrationspunkt (Punkt auf der Bahnkurve von P_1 nach P) und alle Ableitungen sind nach den Koordinaten von $P(s)$ durchzuführen. Da für die praktische Berechnung P ein fester und P_1 ein variabler Punkt ist, muß man statt der Strömung (2,18) die entgegengesetzte Strömung von P nach P_1 betrachten. Wir verwenden die Beziehung

$$S(P_1, P) = -S(P, P_1) \quad (2,23)$$

und ändern die Strömungsrichtung, indem wir setzen

$$m \bar{v} = m v \bar{s} = \nabla S(P, P_1) - e \mathfrak{U}(P). \quad (2,24)$$

Während (2,18) eine von P_1 ausgehende Quellströmung ist, stellt (2,24) eine Strömung mit P_1 als Senkpunkt dar; entsprechend ist die Bogenlänge von P nach P_1 positiv zu zählen ($ds \rightarrow -ds$). (2,21) und (2,22) erhalten damit die Gestalt:

$$\bar{a}_0(P, P_1) = C e^{-\frac{1}{2} \int_{P_1}^P \frac{\Delta S(P_1, P(s)) ds}{|\nabla S(P_1, P(s)) + e \mathfrak{U}(P(s))|}} = C e^{\frac{1}{2} \int_P^{P_1} \frac{\Delta S(P(s), P_1) ds}{|\nabla S(P(s), P_1) - e \mathfrak{U}(P(s))|}} \quad (2,25)$$

und

$$\begin{aligned} a_k(P, P_1) &= -\frac{i}{2} \bar{a}_0(P, P_1) \int_{P_1}^P \frac{\Delta a_{k-1}(P(s), P_1) ds}{|\nabla S(P_1, P(s)) + e \mathfrak{U}(P(s))| \bar{a}_0(P(s), P_1)} = \\ &= -\frac{i}{2} \bar{a}_0(P, P_1) \int_P^{P_1} \frac{\Delta a_{k-1}(P(s), P_1) ds}{|\nabla S(P(s), P_1) - e \mathfrak{U}(P(s))| \bar{a}_0(P(s), P_1)}, \quad (2,26) \end{aligned}$$

wobei alle Ableitungen in (2,25), (2,26) nach den Koordinaten des Punktes $P(s) = P(z(s), x(s), y(s))$ durchzuführen sind. Daher muß man die sonst zur Berechnung verwendeten Elektronenbahnen $s(z, z_1)$, $t(z, z_1)$ durch die Bahnen $\bar{s}(z_1, z)$, $\bar{t}(z_1, z)$ ausdrücken, da sonst die Differentiation nach den Koordinaten des „Anfangspunktes“ der Elektronenbahn durchzuführen wäre.

Wir diskutieren die Bedeutung der Entwicklung (2,15); diese ist sicher im allgemeinen höchstens semikonvergent für $\hbar \rightarrow 0$; die Frage, unter welchen Bedingungen und in welchem Raumgebiet des P -Raumes der Ansatz (2,7) mit der Bedingung (2,10) und dem Reihenansatz (2,15) eine für $\hbar \rightarrow 0$ asymptotische Lösung von (1,8) ist, wurde bisher noch nicht mathematisch eindeutig geklärt. Derartige Untersuchungen wurden bisher nur für die eindimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung durchgeführt.

Ohne genauere Untersuchung kann man nur aussagen, daß Konvergenzschwierigkeiten besonders in der Umgebung des zum Punkte P_1 konjugierten Punktes der durch (2,18) definierten Elektronenströmung auftreten werden. Aus der Bedeutung der Größe $\frac{1}{a_0}$ (nämlich der über alle Richtungen gemittelte relative Änderung der Teilchendichte,

wenn man um die charakteristische Länge $l = \frac{\hbar}{\sqrt{2 m U}}$ fortschreitet)⁴ folgt, daß diese Größe und damit die Größen $a_k(P, P_1)$ $k \geq 1$ gerade in der Umgebung der Konvergenzpunkte der von P_1 ausgehenden Elektronenströmung (2,18) von Bedeutung sein werden (Gebiete, in denen die geometrische Elektronenoptik versagt).

Wir diskutieren die Bedeutung der Reihenentwicklung (2,15). Wenn man die Intensitätsverteilung der (2,7) entsprechenden Elektronenströmung ermittelt, erhält man durch Einsetzen in die Formel für die Elektronenstromdichte⁵

$$u = \frac{\hbar}{2i m} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] + \frac{e}{m} \Re \psi \psi^* \quad (2,27)$$

wieder eine Reihe, die nach Potenzen $\hbar$ $\hbar^k$ fortschreitet. Das von $\hbar$ freie Glied der Reihe lautet:

$$a_0 a_0^* \left| \frac{1}{m} (\nabla S + e \Re) = |a_0 a_0^*| v. \quad (2,28)$$

Wenn man mit $\hbar \rightarrow 0$ geht, bleibt nur das erste Glied übrig und die Stromdichte ist durch

$$u|_{\hbar \rightarrow 0} = |a_0 a_0^*| v \quad (2,29)$$

gegeben, wobei v durch (2,18) definiert ist. Es bleibt also nur das Glied $a_0(P, P_1)$ übrig, das somit der klassisch-mechanischen Intensitätsverteilung entspricht. Die Glieder $a_k(P, P_1)$ ($k \geq 1$) können so gewählt werden, daß sie für einen bestimmten Punkt, z. B. den Quell- oder Senkpunkt P_1 verschwinden. Sie ergeben die wellenmechanische Modifikation der klassisch-mechanischen Intensitätsverteilung.

Da die Größen $a_k(P, P_1)$ mindestens prinzipiell aus (2,25), (2,26) durch Integrationsprozesse bestimmt werden können, wenn $a_0(P, P_1)$ und $S(P, P_1)$, also die klassisch-mechanische Intensitätsverteilung und die geometrisch-optische Elektronenströmung bekannt sind, kann mit Hilfe von (2,25), (2,26) prinzipiell eine wellenmechanische Intensitätsverteilung bestimmt werden, wenn das entsprechende klassisch-mechanische Problem gelöst ist. Für einen bestimmten Punkt, z. B. den Quell- oder Senkpunkt, tritt keine wellenmechanische Modifikation der klassisch-mechanischen Verteilung auf.

Wenn z. B. wie hier, für $a_0(P, P_1)$ die Größen eingetragen werden, die einer klassisch-mechanisch beschriebenen Quellströmung mit der Quelle in P_1 entsprechen, so stellt (2,15) die wellenmechanisch modifizierte Quellströmung dar, wobei die wellenmechanische Modifikation im Quellpunkt P_1 verschwindet.

Die Gln. (2,25), (2,26) machen es sehr gut deutlich, wie zwei verschiedene Betrachtungsweisen einander zugeordnet werden können.

Die Bestimmung der klassisch-mechanischen Intensitätsverteilung, also der Größen $a_0(P, P_1)$, $S(P, P_1)$ entspricht der geometrisch-optischen

⁴ E.O. XXV, (149, 30) ff., XXIX, Abschn. 164. S. 596.

⁵ E.O. XXVI, (154, 22), S. 528.

Betrachtungsweise der Elektronenoptik. Es wird mit diskreten Bahnen gerechnet, die aus dem Wirkungsprinzip mit Hilfe der HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung bestimmt werden können.

Die strenge Bestimmung der wellenmechanischen Intensitätsverteilung, die durch die exakte Bestimmung der Größen $\psi(P)$, bzw. $G(P, P_1)$, also die strenge Lösung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen geleistet wird, entspricht der wellenmechanischen Betrachtungsweise der Elektronenoptik, in der ohne die Vorstellung diskreter Bahnen und ohne Wellenlängenbegriff gearbeitet wird.

Die Lösungsmethode von (1,18) mit Hilfe des W-K-B-Verfahrens, die bei Beschränkung der Reihe für $a(P, P_1)$ auf das Glied $a_0(P, P_1)$ als halbklassische Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung bezeichnet wird, stellt bei Berücksichtigung der Glieder $a_1(P, P_1)$, ... den Zusammenhang zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen her. Man könnte daher allgemein die asymptotische Lösung des durch (1,1), (1,2) formulierten Randwertproblems als halbklassisch bezeichnen, da hier der Begriff der Elektronenbahn und der Wellenlänge implicite (im Lösungsverfahren) aufscheint. Wenn man die Lösungsmethode physikalisch interpretiert, bedeutet sie eine Hinzunahme einer räumlichen Periodizität zum Bahn-begriff der geometrischen Elektronenoptik und bei Berücksichtigung der Glieder $a_1(P, P_1)$, $a_2(P, P_1)$, ..., bzw. weiterer Glieder in den asymptotischen Entwicklungen von (1,18) eine mathematische Erfassung der „Verschmierung“ der Bahnen (Elektronenbahnen als Bahnen, auf denen sich der „Schwerpunkt“ der Wellengruppe bewegt). Bei einer mathematischen Interpretation bedeutet das W-K-B-Verfahren eine gegenseitige Zuordnung zweier Probleme. Jede wellenmechanische Intensitätsverteilung wird einer entsprechenden „klassisch-mechanischen“ Intensitätsverteilung, als deren Modifikation sie erscheint, zugeordnet. Wir werden diesen Gedankengang bei Behandlung der Methode der stationären Phase in § 4 noch weiter verfolgen.

Von hier ausgehend könnten die Gln. (2,25), (2,26) etwa als Ausgangspunkt für eine direkte Behandlung von Beugungsproblemen dienen. Es wären dann unter Berücksichtigung der noch abzuleitenden Ergebnisse der Methode der stationären Phase für $\hbar \rightarrow 0$ asymptotische Lösungen von (1,1) vom Typus des W-K-B-Verfahrens zu suchen. Praktisch hätte man etwa in folgender Weise vorzugehen. In den Punkten der Objektebene $z = z_0$ werden, wie dies bei der Lösung von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen üblich ist, Quellen der Elektronenströmung mit zu $\psi_0(x_0, y_0)$ proportionaler Quellstärke angeordnet. Da die Methode der stationären Phase ergibt, daß zur Intensität in einem gewissen Aufpunkt P_1 nur Wellen beitragen, die von zu P_1 zugehörigen Punkten stationärer Phase erster, zweiter oder dritter Art der Objektebene und von Punkten der scharfen Berandung (der materiellen Blende), in denen $x(s)$ oder $y(s)$ (Gleichung der Randkurve) unstetige Ableitungen irgendwelcher Ordnung haben, herkommen, sind zur Berechnung der Intensität in P_1 einfach diese Beiträge phasenrichtig zu überlagern. Da man außerdem weiß, welche Potenzen von $\hbar$ in

den asymptotischen Reihen, die den einzelnen Beiträgen entsprechen, vorkommen müssen, kann man synthetisch mit Verfahren vom Typus des W-K-B-Verfahrens derartige Reihen aufbauen. Da schließlich durch die Festlegung, daß für einen Quellpunkt alle $a_k = 0$ sind für $k \geq 1$, erreicht wird, daß für die Punkte der Objektebene die wellenmechanische Modifikation verschwindet, würde es genügen, das zu (1,1), (1,2) zugeordnete klassisch-mechanische Problem zu lösen, womit das entsprechende wellenmechanische Problem asymptotisch für $\hbar \rightarrow 0$ gelöst wäre.

Für die Berechnung von $G_s(P, P_1)$ muß $a_0(P, P_1)$ bestimmt werden. Wir gehen in zwei Schritten vor. Für die unmittelbare Umgebung von P_1 folgt aus (2,12), (2,16)

$$S(P_1, P) = -m v_1 r - e (\mathfrak{A}_1 r). \quad (2,30)$$

(v_1 , $\mathfrak{A}_1$ Werte von v und $\mathfrak{A}$ in P_1 , r Radiusvektor $\overline{P_1 P}$). Wir erhalten durch Bildung des Gradienten:

$$\nabla_P S(P_1, P) = -m v_1 \frac{r}{r} - e \mathfrak{A}_1. \quad (2,31)$$

(2,16) hat damit die Form

$$\nabla \left(a_0^2 m v_1 \frac{r}{r} \right) = 0. \quad (2,32)$$

Wenn man für die Lösung

$$a_0(P, P_1) = \frac{1}{4\pi r} \quad (2,33)$$

ansetzt, ist (2,32) und (1,16) erfüllt, $a_0(P, P_1)$ zeigt das in § 1 geforderte Verhalten. Im Rahmen dieser Näherung gilt ferner

$$\Delta a_0 = 0. \quad (2,34)$$

Zur Bestimmung von $a_0(P, P_1)$ im gesamten Halbraum $z \geq z_0$ betrachten wir ein von P_1 ausgehendes Bündel von Elektronenbahnen mit der Öffnung $d\Omega$. Diese aus Elektronenbahnen gebildete kegelförmige Röhre schneidet aus der Ebene $z = \text{const.}$ ein Flächenelement $df = dx dy$ aus (Abb. 3).

Aus dem Satz von der Erhaltung der Teilchenzahl folgt, daß, da durch die aus Elektronenbahnen gebildete kegelförmige Mantelfläche keine Elektronenbahnen durchtreten, gilt:

$$a_0^2(P, P_1)_{P \rightarrow P_1} v_1 r^2 d\Omega = a_0^2(P, P_1) v_z df. \quad (2,35)$$

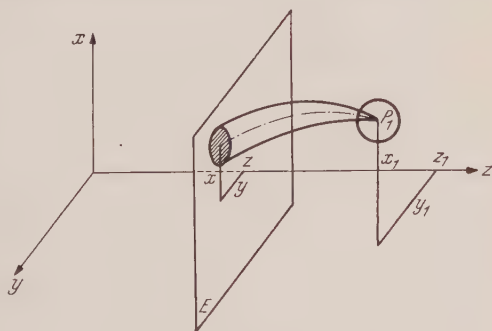


Abb. 3. Zur Berechnung der Größe $a_0(P, P_1)$.

Wenn man aus (2,34) einsetzt, erhält man

$$(4\pi a_0(P, P_1))^2 = \frac{v_1}{v_z} \frac{d\Omega}{df}. \quad (2,36)$$

Wir müssen jetzt noch das Raumwinkelement $d\Omega$ auf das Flächenelement df umrechnen. Wenn $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$ die Richtungskosinusse der Elektronenbahnen in $P_1(z_1, x_1, y_1)$ sind, hat $d\Omega$ die Gestalt:

$$d\Omega = \frac{1}{\gamma_1} d\alpha_1 d\beta_1 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial(\alpha_1, \beta_1)}{\partial(x, y)} dx dy. \quad (2,37)$$

Wegen $v_1 \cdot \gamma_1 = v_{z1}$ erhält man

$$(4\pi a_0(P, P_1))^2 = \frac{(m v_1)^2}{(m v_{z1})(m v_z)} \frac{\partial(\alpha_1, \beta_1)}{\partial(x, y)}. \quad (2,38)$$

Die Transformationsdeterminante berechnen wir aus dem Eikonal mit Hilfe der HAMILTONSchen Fundamentalgleichung

$$\delta S = \mathbf{p}_1 \delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (2,39)$$

so daß $a_0(P, P_1)$ endgültig die Gestalt

$$a_0(P, P_1) = \frac{1}{4\pi} \left[e A_z(P_1) + \frac{\partial S(P, P_1)}{\partial z_1} \right]^{-1/2} \cdot \left[e A_z(P) - \frac{\partial S(P, P_1)}{\partial z} \right]^{-1/2} \cdot \begin{vmatrix} S_{x_1 x}(P, P_1) & S_{x_1 y}(P, P_1) \\ S_{y_1 x}(P, P_1) & S_{y_1 y}(P, P_1) \end{vmatrix}^{1/2} \quad (2,40)$$

hat.

Zur Ausrechnung von (1,18) brauchen wir die GröÙe $\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial z} \Big|_{P=P_0}$.

$$= \frac{\partial G(P_0, P_1)}{\partial z_0}. \text{ Durch Einsetzen von (2,4) und (2,6) in (2,1) wird}$$

$$\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial z} = \frac{\partial a(P, P_1)}{\partial z} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} S(P_1, P)} - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S(P_1, P)}{\partial z} G(P, P_1) -$$

$$- \frac{\partial a(P, \bar{P}_1)}{\partial z} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} S(\bar{P}_1, P)} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S(\bar{P}_1, P)}{\partial z} G(P, \bar{P}_1). \quad (2,41)$$

Wegen der physikalischen Bedeutung der GröÙen $a(P, P_1)$ und $v_z(P)$ und der Symmetrie der Anordnung muß

$$\frac{\partial a(P, P_1)}{\partial z} = \frac{\partial a(\bar{P}, \bar{P}_1)}{\partial \bar{z}} = - \frac{\partial a(\bar{P}, \bar{P}_1)}{\partial z} \quad (2,42)$$

und

$$m v_z(P) = - m v_z(\bar{P}) \quad (2,43)$$

sein, wobei

$$m v_z(P) = \frac{\partial S(P_1, P)}{\partial z} + e A_z(P); \quad m v_z(\bar{P}) = \frac{\partial S(\bar{P}_1, \bar{P})}{\partial z} + e A_z(\bar{P}) \quad (2,44)$$

ist und $\bar{z} = 2z_0 - z$ gesetzt wurde.

Wir setzen speziell für $P = \overline{P} = P_0$ unter Verwendung von (2,42), (2,43), (2,44) ein. Wenn man noch $S(P_1, P_0) = S(\overline{P}_1, P_0)$, (2,5) und (2,23) verwendet, erhält man:

$$\frac{\partial G(P_0, P_1)}{\partial z_0} = 2 \left[\frac{\partial a(P_0, P_1)}{\partial z_0} - \frac{i}{\hbar} a(P_0, P_1) \left[\frac{\partial S(P_0, P)}{\partial z_0} - e A_z(P_0) \right] \right] \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S(P_0, P_1)}. \quad (2,45)$$

Das Beugungsintegral (1,18) hat, wenn man diese Größen einsetzt, die Form

$$\psi(P) = \frac{2}{\hbar i} \int_B \int \left\{ a(P_0, P) \left[e A_z(P_0) - \frac{\partial S(P_0, P)}{\partial z_0} \right] + \hbar i \frac{\partial a(P_0, P)}{\partial z_0} \right\} \cdot \psi_0(P_0) e^{\frac{i}{\hbar} S(P_0, P)} dx_0 dy_0, \quad (2,46)$$

oder, wenn man für $a(P_0, P)$ die Reihe (2,15) einträgt:

$$\begin{aligned} \psi(P) = & \frac{2}{\hbar i} \int_B \int \left\{ a_0(P_0, P) \left[e A_z(P_0) - \frac{\partial S(P_0, P)}{\partial z_0} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^K \left[a_k(P_0, P) \left[e A_z(P_0) - \frac{\partial S(P_0, P)}{\partial z_0} \right] + i \frac{\partial a_{k-1}(P_0, P)}{\partial z_0} \right] \hbar^k \right\} \cdot \\ & \cdot \psi_0(P_0) e^{\frac{i}{\hbar} S(P_0, P)} dx_0 dy_0 + O(\hbar^{K+1}). \end{aligned} \quad (2,47)$$

Für $a_0(P_0, P)$ ist (2,40), für die $a_k(P_0, P)$ $k \geq 1$ sind die Größen nach (2,25), (2,26) einzusetzen. Das Integral ist über dasjenige Gebiet der Ebene E_0 zu erstrecken, in dem $\psi_0(P_0)$ von Null verschieden ist. (2,47) stellt in allgemeiner Form den Einfluß eines gegebenen elektrisch-magnetischen Abbildungsfeldes auf die Wellenfunktion $\psi(P)$, die in der Objekzebene vorgegeben ist, dar und gestattet die Berechnung von $\psi(P)$ für dasjenige Gebiet des Halbraumes $z \geq z_0$, indem für $S(P_0, P)$ und $a(P_0, P)$ geeignete Darstellungen angegeben werden können.

Für die weitere Berechnung sind $S(P_0, P)$ und der Ausdruck in der geschlungenen Klammer des Integrals (2,47) entsprechend zu spezialisieren. Wir denken uns in üblicher Weise $S(P_0, P)$ nach Potenzen von x_0, y_0, x, y entwickelt. Je nach der Genauigkeit der Berechnung und dem Gebiet, in dem die Berechnung gelten soll, brechen wir mit S_{2n} ab und vernachlässigen alle Glieder von einer Ordnung größer als $2n$. Der Fall $n = 1$ (Beschränkung auf quadratische Glieder) entspricht dem Paraxialgebiet, der Fall $n = 2$ (Berücksichtigung von Gliedern bis zur vierten Ordnung) entspricht dem SEIDELschen Gebiet. Aus der Größe $S(P_0, P)$ können nach (2,40) und (2,25), (2,26) die Größen

$$a_0(P_0, P) \left[e A_z(P_0) - \frac{\partial S(P_0, P)}{\partial z_0} \right], \quad (2,48)$$

$$a_k(P_0, P) \left[e A_z(P_0) - \frac{\partial S(P_0, P)}{\partial z_0} \right] + i \frac{\partial a_{k-1}(P_0, P)}{\partial z_0} \quad k \geq 1$$

ebenfalls als Polynome in x_0, y_0, x, y bestimmt werden. Die Koeffizienten dieser Polynome hängen von $S(P_0, P)$ und dessen Ableitungen ab; um zu entscheiden, welche der Größen (2,48) bei gegebenem n berücksichtigt werden müssen, überlegen wir, daß bei gegebenem k die Polynome (2,48) nur bis derjenigen Ordnung m zu entwickeln sind, daß alle Koeffizienten der Polynome von der Ordnung $\leq m$ nur von den Größen $S_0 \dots S_{2n}$, hingegen Koeffizienten der Polynome von Ordnungen $> m$ auch von Größen $S_{2(n+1)} \dots$ abhängen. Aus (2,25), (2,26) folgt, daß die Größen $a_{k+1}(P_0, P)$ durch Differentiationsprozesse aus den Größen $a_k(P_0, P)$ hervorgehen, da immer die Größe Δa_k zu bilden ist (zweimalige Ableitung). Wenn daher das Polynom mit dem Index k von der Ordnung m ist, ist das Polynom mit dem Index $k+1$ von der Ordnung $m-2$. Es sind die Polynome (2,48) also nur bis zu demjenigen Index k zu berücksichtigen, daß die Ordnung dieses Polynomes $m \geq 0$ ist, während $m-2 < 0$ ist. Bei diesem Näherungsverfahren besteht daher $\partial G / \partial z_0$ nur aus endlich vielen Gliedern.

Gl. (2,47) ist das Analogon zur KIRCHHOFFSchen Beugungsformel, die sie als Spezialfall enthält. Wir nennen sie daher allgemein das KIRCHHOFFSche Beugungsintegral.

Die Auswertung von (2,47) ist sehr schwierig und nur in Spezialfällen exakt durchführbar.

Da $\hbar$ eine sehr kleine Größe ist, stellt $e^{\frac{i}{\hbar} S(P_0, P)}$ in denjenigen Bereichen, in denen $S(P_0, P)$ nicht nur sehr wenig von P_0 abhängt, eine sehr schnell oszillierende Funktion und (2,47) daher ein Integral über eine sehr schnell oszillierende Funktion dar.

(2,47) ist ein Integral vom Typus

$$\int_B \int g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy, \quad (2,49)$$

wobei ω eine große reelle Zahl, f und g Funktionen der angegebenen Variablen sind und das Integral über ein von einer geschlossenen Randkurve $S(B)$ begrenztes Gebiet B der $x y$ -Ebene zu erstrecken ist.

Wegen der im allgemeinen sehr komplizierten Gestalt von g und f und der Kompliziertheit der Randkurve erscheint es sehr wenig aussichtsreich, Integrale vom Typus (2,49) streng zu lösen. Dies ist nur in Spezialfällen durch Einführung geeigneter, der Berandung angepaßter Koordinaten möglich.

Als Näherungsmethode erscheint dem Integral am besten die Methode der stationären Phase angepaßt zu sein, durch die es unter gewissen Voraussetzungen möglich ist, Integrale vom Typus (2,49) durch für $\omega \rightarrow \infty$ asymptotische Reihen, die nach Potenzen von $\omega^{-m/n}$ fortschreiten

(n fest, m variabel) näherungsweise auszuwerten. Diese Methode ist die einzige bekannte nichttriviale Näherungsmethode für Integrale der Art

$$\int_B g(x_i) \cdot e^{i\omega f(x_i)} dx_i \quad (2,50)$$

($i = 1 \dots n$) (dx_i Volumelement, Integral über geeignet zu wählendes Gebilde im R_n zu erstrecken) für $n \geq 2$, da etwa die Sattelpunktmethode im R_n nur mit Hilfe der Theorie von Funktionen n komplexer Variabler durchgeführt werden kann, was im Falle $n \geq 2$ zu großen mathematischen Schwierigkeiten führt.

Es werden hier nur die benutzten mathematischen Sätze angeführt, deren Beweise in einer eigenen Arbeit gebracht werden⁶.

Satz 1.) V. D. CORPUT⁷ hat bewiesen, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ das Integral

$$J = \int_a^b g(x) e^{f(x)} dx, \quad (2,51)$$

wobei $f(x)$ und $g(x)$ komplexe Funktionen der reellen Variablen x sind, a, b , reell sind und über die reelle x -Achse integriert wird, einen Näherungswert $\bar{J}$ besitzt, der nur vom Verhalten der Funktionen f und g in der Nähe endlich vieler Punkte von a, b , abhängt. Zu diesen Punkten gehören die Endpunkte a, b , des Intervalles und alle Punkte x_i des Intervalles (a, b) , für die gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{f'(x)}{\sqrt{f''(x)}} \neq 0 \quad \text{und in denen} \\ \operatorname{Im} \frac{f'(x)}{\sqrt{f''(x)}} \quad \text{das Vorzeichen wechselt.} \end{aligned} \quad (2,52)$$

[Führende Punkte der Funktion $f(x)$ in (a, b)]. Der Näherungswert stellt sich dabei in der Form

$$\bar{J} = A + B + \sum_i V_i \quad (2,53)$$

dar, wobei A eindeutig bestimmt ist durch $f(a)$, $g(a)$ und die Ableitungen von f und g in a bis zu einer bestimmten Ordnung, entsprechend B und V_i .

Setzt man

$$f(x) = u(x) + i v(x) \quad (2,54)$$

($u(x), v(x)$ reell), führt damit die Bedingungen (2,52) aus und setzt dann speziell $u(x) \equiv 0$, so fällt die erste der Bedingungen (2,52) weg und die führenden Punkte sind durch die Bedingung

$$v'(x) = 0 \quad (2,55)$$

⁶ G. BRAUN, Arbeit in Vorbereitung zur Drucklegung.

⁷ V. D. CORPUT, Zur Methode der stationären Phase I, *Compositio mathematica* I, S. 15—38. V. D. CORPUT, Zur Methode der stationären Phase II, *Compositio mathematica* III, S. 328—372.

gekennzeichnet, fallen also mit den Punkten stationärer Phase zusammen. In diesem Spezialfall, der allein interessieren wird, heißt das Näherungsverfahren die Methode der stationären Phase (STOKES, KELVIN, 1887).

E. HLAWKA⁸ hat fußend auf v. D. CORPUT den Satz 2.) bewiesen.

Satz 2.) Voraussetzungen: 1. Es seien in $[a, b]$ zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ definiert. 2. Es sei $f(x)$ eine reelle, $g(x)$ eine reelle oder komplexe Funktion der reellen Variablen x , a, b seien reell und endlich. 3. Es sei $f(x)$ $(n+2)(k+1)$, $g(x)$ $(n+1)(k+1)$ mal stetig differenzierbar, $n = \text{Max}(n_a, n_b)$, k natürlich, beliebig. 4. Für $x = a$ gelte $f^{(k)}(a) = 0$ für $1 \leq k < n_a$, $f^{(k)}(a) \neq 0$ für $k = n_a$. ($f^{(n_a)}(a)$) erste nicht verschwindende Ableitung von f an der Stelle $x = a$). Für $x = b$ gelte $f^{(k)}(b) = 0$ für $1 \leq k < n_b$, $f^{(k)}(b) \neq 0$ für $k = n_b$. ($f^{(n_b)}(b)$) erste nicht verschwindende Ableitung von f an der Stelle $x = b$). 5. In (a, b) sei $f'(x) \neq 0$ ($\text{Min } |f'(x)| = C_1 > 0$ für (a, b)). 6. $g(x)$ enthalte die Größe ω nicht. 7. ω sei reell ≥ 1 .

Dann hat das Integral

$$J = \int_a^b g(x) \cdot e^{i\omega f(x)} dx \quad (2,56)$$

einen Näherungswert $\bar{J}$, der sich in der Form

$$\bar{J} = A + B + O(\omega^{-(k+2)/n}); \quad n = \text{Max}(n_a, n_b) \quad (2,57)$$

darstellt, wobei A nur von $g^{(i)}(a)$, $f^{(j)}(a)$ mit $0 \leq i \leq (k+1)(n_a+1)$, $0 \leq j \leq (k+1)(n_a+2)$ abhängt, analog B und B haben explizit die Form mit $\omega \rightarrow \infty$ asymptotischer Reihen, die nach Potenzen von $\omega^{-(j+1)/n_a}$, bzw. $\omega^{-(j+1)/n_b}$ fortschreiten.

Wir erhalten explizit:

$$A = \sum_{j=0}^{(k+1)(n_a+1)} A_j \cdot \omega^{-(j+1)/n_a}, \quad (2,58)$$

wobei

$$A_j = \frac{e^{i\omega f(a)}}{n_a} \sum_{t=0}^j i^t \cdot l_{k, j+n_a t}(a) \frac{\Gamma\left[\frac{j+n_a t+1}{n_a}\right]}{\Gamma[j+n_a t+1]} \cdot \frac{e^{\pm \frac{i\pi}{2n_a} \left[j+n_a t+1\right]}}{\left(\frac{1}{n_a!} |f^{(n_a)}(a)|\right)^{(j+n_a t+1)/n_a}} \cdot f^{(n_a)}(a) \geq 0 \quad (2,59)$$

ist. Die einzelnen Größen bedeuten:

$$l_{t,s}(a) = \sum_{l=(n_a+1)t}^s \binom{s}{l} \cdot g^{(s-l)}(a) \cdot K_{t,l}(a), \quad (2,60)$$

wobei $l_{t,s}(a) = 0$ für $t > \left\lceil \frac{s}{n_a+1} \right\rceil$, $l_{0s}(a) = g^{(s)}(a)$ ist.

⁸ E. HLAWKA, Über Integrale auf konvexen Körpern I, Monatshefte für Mathematik, Bd. 54 (1950), 1. Heft.

Die Größen $K_{t,r}(a)$ sind mit Hilfe der Rekursionen

$$K_{t+1,m+1}(a) = \sum_{r=(n_a+1)t}^{r=m-n_a} \binom{m}{r} \cdot f^{(m-r+1)}(a) \cdot K_{t,r}(a) \quad (2,61)$$

zu bestimmen, wobei $K_{0,0}(a) = 1$, $K_{0,m} = 0$ für $m \geq 1$, $K_{t,m} = 0$ für $t > \left[\frac{m}{n_a + 1} \right]$ ist. Für B erhalten wir:

$$B = \sum_{j=0}^{(k+1)(n_b+1)} B_j \cdot \omega^{-(j+1)/n_b}, \quad (2,62)$$

für die B_j

$$B_j = -\frac{e^{i\omega f(b)}}{n_b} \sum_{t=0}^j i^t \cdot l_{t,j+n_b t}(b) \frac{\Gamma\left(\frac{j+n_b t+1}{n_b}\right)}{\Gamma(j+n_b t+1)} \cdot D(j+n_b t, n_b) \cdot \frac{e^{\frac{i\pi}{2n_b}(j+n_b t+1)}}{\left(\frac{1}{n_b!} |f^{(n_b)}(b)|\right)^{(j+n_b t+1)/n_b}}; \quad f^{(n_b)}(b) \geq 0. \quad (2,63)$$

Dabei bedeutet

$$D(m, n_b) = \begin{cases} e^{\pm i\pi(m+1)} & \text{wenn } n_b \text{ gerade,} \\ e^{\pm i\pi(m+1)[1-1/n_b]} & \text{wenn } n_b \text{ ungerade ist.} \end{cases} \quad f^{(n_b)}(b) \geq 0 \quad (2,64)$$

Die Größen $l_{t,s}(b)$, bzw. $K_{t,s}(b)$ entstehen aus den entsprechenden Größen bei A durch Vertauschen von a mit b .

Eine Zurückführung des allgemeinen Integrals, das der Bedingung 5.) nicht genügt und für das etwa für die Endpunkte a, b des Intervalles $n_a = 1, n_b = 1$ ist, auf das hier behandelte Integral ist dadurch möglich, daß das Integrationsintervall entsprechend den vorkommenden Punkten stationärer Phase unterteilt und die Teilintegrale gesondert behandelt werden.

Satz 3.) Voraussetzungen: 1. In einem endlichen Gebiet B der xy -Ebene seien mit Einschluß des Randes $S(B)$ zwei Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ definiert. 2. Es sei $f(x, y)$ eine reelle, $g(x, y)$ eine reelle oder komplexe Funktion der reellen Variablen x, y . 3. f und g seien stetig, f $2L + 3$, g $2L$ mal stetig differenzierbar (L natürlich, beliebig). 4. Es sei ω reell ≥ 1 . 5. Im Inneren von B sollen nur endlich viele Punkte stationärer Phase erster Art x_i, y_i existieren, für die gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_i, y_i} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{x_i, y_i} = 0. \quad (2,62)$$

Es soll kein Punkt (2,62) auf $S(B)$ liegen. Für jeden dieser Punkte stationärer Phase erster Art sei mindestens eine der drei Größen $\partial^2 f / \partial x^2$,

$\partial^2 f / \partial x \partial y$ und $\partial^2 f / \partial y^2$ von Null verschieden. 6. Die Gleichung der Berandung sei $x(s)$, $y(s)$. $x(s)$ und $y(s)$ seien stetig, die Größen $x^{(m)}(s)$, $y^{(m)}(s)$ $1 \leq m \leq M$ seien abteilungsweise stetig (M beliebig, natürlich). Dann existiert für das Integral

$$J = \iint_B g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy \quad (2,63)$$

ein Näherungswert $\bar{J}$, der sich in der Form

$$\bar{J} = \sum_i V_i + R \quad (2,64)$$

darstellen läßt, wobei V_i eindeutig bestimmt ist durch die Werte von f und g und ihrer Ableitungen nach x und y an der Stelle stationärer Phase erster Art x_i , y_i , R eindeutig bestimmt ist durch die Werte von f und g und ihrer Ableitungen nach s und n auf $S(B)$ (n nach außen positiv gezählte Normale, s Bogenlänge der Randkurve). Die Darstellung hat die Form mit $\omega \rightarrow \infty$ asymptotischer Reihen. Ein Punkt stationärer Phase erster Art wird näher durch das Vorzeichen der Determinante

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \bigg|_{x_i, y_i} \quad (2,65)$$

klassifiziert. Wir bezeichnen ihn als elliptisch, parabolisch, hyperbolisch, je nachdem $D \gtrless 0$ ist, da dann dieser Punkt ein elliptischer, parabolischer, bzw. hyperbolischer Flächenpunkt der Fläche $z = f(x, y)$ ist.

Man könnte Satz 3.) auch unter erweiterten Voraussetzungen beweisen, es könnten für einen Punkt stationärer Phase erster Art auch alle zweiten Ableitungen von f verschwinden (was weitere Klassifikationen notwendig machen würde) und es könnte ein Punkt stationärer Phase erster Art auf $S(B)$ liegen.

Satz 4.) Die Größe R , die sich als Summe von Integralen vom Typus (2,56) darstellt, hat nach den Sätzen 1.) und 2.) den Näherungswert

$$\bar{R} = \sum_j W_j + \sum_k X_k, \quad (2,66)$$

wobei die W_j eindeutig bestimmt sind durch das Verhalten der Funktionen f und g und ihrer Ableitungen nach n und s an den Stellen stationärer Phase zweiter Art der Funktion $f(x, y)$: $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$

$$\frac{d}{ds} [f(x(s), y(s))] \bigg|_{s=s_j} = 0. \quad (2,67)$$

Die Größen X_k sind eindeutig bestimmt durch das Verhalten von f und g und ihrer Ableitungen nach den Normalen und Tangenten der Berandung an den Stellen der Berandung $x(s)$, $y(s)$, $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$, an denen $x^{(m)}(s)$ oder $y^{(m)}(s)$ $1 \leq m \leq M$ unstetig ist.

Es gilt dann explizit:

$$J = \sum_i V_i + R + O(\omega^{-1-L/3}) + O(\omega^{-2(L+1)/3}). \quad (2,68)$$

Wenn für einen Punkt stationärer Phase erster Art x_i, y_i , $D > 0$ ist hat V_i die Gestalt

$$V_i = \sum_{l=0}^L A_l(x_i, y_i) \omega^{-(l+1)} + O(\omega^{-1-L/3}), \quad (2,69)$$

wobei

$$A_l(x_i, y_i) = \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{|D|^{1/2}} \sum_{t=0}^{2l} \sum_{k=0}^{2(t+l)} \frac{\Gamma(t+l+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(2t+2l-k+1)} \cdot \\ \cdot i_{2(t+l), k} \cdot J_{2(t+l), k} \cdot e^{i \frac{\pi}{2} t} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2} (t+l+1)} \quad f_{20} \geq 0 \quad (2,70)$$

ist.

Es bedeuten

$$J_{2n, k} = \frac{2\pi}{2^n} \cdot D^{-n} |f_{02}^{k/2} \cdot f_{20}^{n-k/2}| \cdot \sum_{l=\text{Max}(0, k-n)}^{l=\text{Min}(n, k)} \binom{k}{l} \binom{2n-k}{n-l} \cdot e^{i\chi(2l-k)} \\ \sin \chi = \left| \frac{D^{1/2}}{(f_{20} f_{02})^{1/2}} \right|; \quad \cos \chi = \mp \frac{f_{11}}{|(f_{20} f_{02})^{1/2}|}; \quad f_{20} \geq 0, \quad (2,71)$$

$$i_{l, k} = \sum_{\alpha=0}^k \sum_{\beta=3t-\alpha}^{j-k} \binom{k}{\alpha} \binom{j-k}{\beta} \cdot g_{k-\alpha, j-k-\beta} \cdot iK_{\alpha\beta}, \quad (2,72)$$

(es ist $i_{l, k} = 0$ für $3t > j$)

$${}_{t+1}K_{m, n} = \sum_j \binom{m-1}{j} \binom{n}{k} \cdot iK_{j, k} \cdot f_{m-j, n-k}. \quad (2,73)$$

Dabei ist $j+k \geq 3t$, $j+k \leq m+n-3$, $m \geq 1$. (Die dazu analoge Formel erhält man, wenn man auf der rechten Seite m, n und j, k vertauscht, diese gilt für $n \geq 1$.) Es ist ${}_0K_{0,0} = 1$, ${}_0K_{m, n} = 0$ für $m, n \neq 0$, ${}_tK_{m, n} \neq 0$ für $3t \leq m+n$, ${}_tK_{m, n} = 0$ für $3t > m+n$.

Es wurde zur Abkürzung gesetzt

$$f_{k, j-k} = \frac{\partial^j f}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \Big|_{x_i, y_i}; \quad g_{k, j-k} = \frac{\partial^j g}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \Big|_{x_i, y_i}. \quad (2,74)$$

Das Randintegral R läßt sich in der Form

$$R = - \sum_{j=0}^{2(k+1)} \omega^{-(j+1)} \oint C_j(s) \cdot e^{i\omega f(x(s), y(s))} ds + O \quad (2,75)$$

darstellen, wobei die $C_j(s)$ die Stelle von g im Integral (2,56) einnehmen. Die asymptotische Reihenentwicklung für R ergibt asymptotische Reihen, die nach Potenzen von $\omega^{-1-(m+1)/n_i}$ fortschreiten [n_i Ordnung der ersten nichtverschwindenden Ableitung von $f(x(s), y(s))$ an der Stelle

stationärer Phase zweiter Art $x(s_i)$, $y(s_i)$; für einen Punkt $\bar{x}_k, \bar{y}_k$, an dem $x^{(m)}(s)$ oder $y^{(m)}(s)$ unstetig ist, ist $n_i = 1$. Die Berechnung der einzelnen Glieder von R wird nicht explizit durchgeführt, da die Resultate sehr kompliziert sind und nichts prinzipiell Neues ergeben.

Wenn ein Punkt stationärer Phase erster Art auf $S(B)$ liegt (Punkt stationärer Phase dritter Art) und $D > 0$ ist, gilt:

$$V_i = \sum_{l=0}^L A_l(x_i, y_i) \cdot \omega^{-(1+l/2)} + O(\omega^{-1-L/6}), \quad (2,76)$$

wobei

$$A_l = \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{\pi |D|^{1/2}} \sum_{t=0}^l \sum_{k=0}^{l+2t} \cdot t^{l+2t, k} \frac{\Gamma(l/2 + t + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(l + 2t - k + 1)} \cdot H_{l+2t, k}(\varphi_1) \cdot e^{\pm i \cdot \pi \cdot (l/2 + t + 1)} \cdot e^{+ i \pi \cdot t/2}, \quad f_{20} \geq 0 \quad (2,77)$$

ist. Dabei bedeuten die $t^{l+2t, k}$ die nach (2,72) definierten Größen und $H_{j, k}(\varphi_1)$ ist durch

$$H_{j, k}(\varphi_1) = + |2j/2 \cdot f_{02}^{k/2} \cdot f_{20}^{(j-k)/2} \cdot D^{-j/2}| \cdot \int_0^\pi \cos^k(\varphi + \bar{\varphi}_1) \cos^{j-k}(\varphi + \bar{\varphi}_2) d\varphi \quad (2,78)$$

definiert, weiters

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{y'(s)}{x'(s)} \Big|_{\substack{x_i = x(s_i) \\ y_i = y(s_i)}} \\ \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 &= \pm \frac{1}{+|D|^{1/2}} (f_{11} + f_{02} \operatorname{tg} \beta); \quad \operatorname{tg} \bar{\varphi}_2 = \mp \frac{1}{+|D|^{1/2}} (f_{11} + f_{20} \operatorname{ctg} \beta); \\ & f_{20} \geq 0. \end{aligned} \quad (2,79)$$

Die Größe R hat in diesem Falle die gleiche Gestalt wie im ersten Falle (2,75).

Um die Sätze 1.) bis 4.) auf die Auswertung des Integrals (2,47) anzuwenden, sind folgende Fragen zu diskutieren:

1. Es ist die Berechnung der Punkte stationärer Phase erster Art durchzuführen, die Berechnungsmethode, die physikalische Bedeutung und die Anzahl dieser Punkte anzugeben.

2. Es ist die physikalische Bedeutung der Methode der stationären Phase zu erläutern und der physikalische Sinn der den Größen V_i und R entsprechenden Größen anzugeben; ferner ist der Zusammenhang mit der geometrischen Elektronenoptik aufzuzeigen.

§ 3. Über die geometrisch-optische Bedeutung und die Bestimmung der Punkte stationärer Phase.

Wir gehen vom Integral (2,47) aus und nehmen zur weiteren Berechnung an, daß $\psi(P_0)$ eine ebene Welle darstellt, die durch ein ausgedehntes phasenstrukturiertes, von einer materiellen Blende mit dem

Blendenrand $S(B)$ begrenztes Objekt modifiziert wird. Die einfallende Welle sei von der Gestalt

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} [a x + b y + c (z - z_0)]}, \quad (3,1)$$

daher gilt für die Punkte der Objektebene $z = z_0$:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} [a x_0 + b y_0]}, \quad (3,2)$$

Die einfallende Welle wird durch das Objekt, das durch eine Objektfunktion

$$D(x_0, y_0) e^{i \sigma(x_0, y_0)} \quad (3,3)$$

gekennzeichnet sein soll, modifiziert. Wir nehmen an, daß $\sigma(x_0, y_0)$ gegenüber der großen Zahl

$$\frac{1}{\hbar} [S(z_0, x_0, y_0, z, x, y) + a x_0 + b y_0] \quad (3,4)$$

nur eine kleine Größe sei (Grobstruktur des Objektes), daß also die Wellenflächen $S(z_0, x_0, y_0, z, x, y) + a x_0 + b y_0 = \text{const.}$ durch die Phasenstruktur des Objektes nicht zu stark modifiziert werden. Die Phasenfunktion ist durch (3,4) gegeben, die Punkte stationärer Phase erster Art sind als Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} + a = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} + b = 0 \quad (3,5)$$

zu bestimmen. Durch die Gln. (3,5) werden für konstantes z_0, z jedem Punkte x, y ein oder mehrere Punkte x_0, y_0 zugeordnet (zum Punkte x, y zugeordnete Punkte stationärer Phase erster Art der Ebene z_0). Wir untersuchen die geometrisch-optische Bedeutung der Punkte stationärer Phase erster Art.

Es sei $S(z_0, x_0, y_0, z, x, y)$ ein vollständiges Integral der HAMILTON-JACOBI'schen Differentialgleichung (2,10). S hängt außer von den Variablen z, x, y noch von den Parametern z_0, x_0, y_0 ab. Nach dem Satz von JACOBI erhält man die Bahnen der geometrisch-optischen Elektronenbewegung, wenn man

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = -a; \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} = -b; \quad \frac{\partial S}{\partial z_0} = -c \quad (3,6)$$

setzt, wobei a, b, c Konstante sind, die die spezielle Bahn festlegen, und S das Punkt-Punkteikonal $S(P_0, P)$ ist. Nach der HAMILTON'schen Fundamentalgleichung (2,39) bedeuten aber a, b, c die Komponenten des Anfangsimpulses der betreffenden Bahn. Die durch (3,6) festgelegten Elektronenbahnen gehen also durch den Punkt $P(z, x, y)$ und haben den Anfangsimpuls (a, b, c) . Ein Vergleich von (3,5) und (3,6) zeigt, daß die Punkte stationärer Phase erster Art $P_0(z_0, x_0, y_0)$ genau die Anfangspunkte der geometrisch-optischen Bahnen sind, die durch den Punkt $P(z, x, y)$ gehen und den Anfangsimpuls (a, b, c) haben. Die letzte der Gln. (3,6) ist identisch erfüllt, da zusätzlich angenommen wird, daß alle zur Konkurrenz zugelassenen Elektronen gleiche z -Komponente des

Anfangsimpulses haben sollen. (Es wird kein Farbfehler betrachtet.) Durch (3,5) sind die Elektronenbahnen in der Form

$$a = a(z_0, x_0, y_0, z, x, y); \quad b = b(z_0, x_0, y_0, z, x, y) \quad (3,7)$$

durch Anfangs- und Endpunkt festgelegt. Wir brauchen jedoch eine Festlegung der Bahnen in der Form

$$x_0 = x_0(z_0, a, b, z, x, y); \quad y_0 = y_0(z_0, a, b, z, x, y) \quad (3,8)$$

durch Anfangsimpuls und Endpunkt. Die Auflösung des Systems (3,7) nach (3,8) ist immer dann möglich, wenn die Transformationsdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_0} & \frac{\partial a}{\partial y_0} \\ \frac{\partial b}{\partial x_0} & \frac{\partial b}{\partial y_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{x_0, x_0} & S_{x_0, y_0} \\ S_{y_0, x_0} & S_{y_0, y_0} \end{vmatrix} \quad (3,9)$$

verschieden von Null ist. Die Auflösung ist dann in einer gewissen Umgebung auch eindeutig, das heißt in einer gewissen Umgebung eines Punktes x_0, y_0 , der zu einem Endpunkt $P(z, x, y)$ und einem Anfangsimpuls (a, b, c) gehört, befindet sich kein zweiter Anfangspunkt x_0, y_0 mit gleichem Anfangsimpuls und gleichem Endpunkt der Bahn. Soweit es diese Umgebung betrifft, ist das Randwertproblem (3,8) eindeutig, wenn das Randwertproblem (3,7) eindeutig ist, das heißt es gibt nur einen zu $P(z, x, y)$ zugeordneten Punkt stationärer Phase erster Art x_0, y_0 in einer gewissen P_0 Umgebung.

Zur expliziten Bestimmung der Punkte stationärer Phase erster Art bedienen wir uns des gemischten Eikonals $T(z_0, p_{x_0}, p_{y_0}, z, x, y)$. Bei bekanntem Punkt-Punkteikonal $S(z_0, x_0, y_0, z, x, y)$ definieren wir das gemischte Eikonal $T(z_0, p_{x_0}, p_{y_0}, z, x, y)$ durch die Gleichung:

$$T(z_0, p_{x_0}, p_{y_0}, z, x, y) = x_0 p_{x_0} + y_0 p_{y_0} + S(z_0, x_0, y_0, z, x, y), \quad (3,10)$$

wobei man sich x_0, y_0 nach (3,8) durch Anfangsimpuls und Endpunkt ausgedrückt denkt. Wir bilden das totale Differential

$$\delta T = x_0 \cdot \delta p_{x_0} + y_0 \cdot \delta p_{y_0} + p_x \cdot \delta x + p_y \cdot \delta y + p_z \cdot \delta z - p_{x_0} \cdot \delta z_0, \quad (3,11)$$

es ist also $\delta T = 0$, wenn

$$\delta p_{x_0} = 0; \quad \delta p_{y_0} = 0; \quad \delta z_0 = 0; \quad \delta x = 0; \quad \delta y = 0; \quad \delta z = 0, \quad (3,12)$$

das heißt T variiert erst um Größen klein von zweiter Ordnung, wenn p_{x_0}, p_{y_0}, z_0 bzw. z, x, y um Größen klein von erster Ordnung variieren (T ist stationär gegenüber Variationen des Endpunktes und des Anfangsimpulses). Wir brauchen daher bei der Berechnung von $T(z_0, p_{x_0}, p_{y_0}, z, x, y)$ für die Bahnen (3,8) nur Bahnen $2m - 1$ -ter Ordnung einsetzen, um das gemischte Eikonal bis auf Glieder einschließlich $2n$ -ter Ordnung zu erhalten ($2m - 1 \leq n < 2m + 1$), das heißt die einzelnen Bahnen können rekursiv bestimmt werden. Um z. B. die Bahnen dritter Ordnung in der Gestalt (3,8) zu bestimmen, geht man mit den Bahnen erster Ordnung in der Gestalt (3,8) in (3,10) hinein.

Die Größen x_0, y_0 bestimmen sich dann aus

$$x_0 = \frac{\partial T}{\partial p_{x_0}}; \quad y_0 = \frac{\partial T}{\partial p_{y_0}}. \quad (3,13)$$

Wenn man (3,10) berücksichtigt und die Ordnung der einzelnen Bahnen entsprechend bezeichnet, erhält man unter Berücksichtigung von (3,5)

$$x_0^{(2n-1)} = x_0^{(2m-1)} + \frac{\partial(S_{2m+2} + \dots + S_{2n})}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0^{(2m-1)}}{\partial p_{x_0}} + \frac{\partial(S_{2m+2} + \dots + S_{2n})}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial y_0^{(2m-1)}}{\partial p_{y_0}} \quad (3,14)$$

wobei $x_0^{(2m-1)}(z_0, p_{x_0}, p_{y_0}, z, x, y)$, $y_0^{(2m-1)}(z_0, p_{x_0}, p_{y_0}, z, x, y)$ ist und in den Eikonalen für x_0, y_0 die Bahnen $2m-1$ -ter Ordnung einzusetzen sind. Eine analoge Gleichung gilt für $y_0^{(2n-1)}$. Die Bahnen (3,8) können natürlich auch durch einen Reihenansatz von (3,8) nach Potenzen x, y bis zu einer gewissen Ordnung bestimmt werden, wobei die Koeffizienten durch Einsetzen in (3,5) zu berechnen sind.

Wir diskutieren die Bedeutung der Gleichung

$$D = \begin{vmatrix} S_{x_0, x_0} & S_{x_0, y_0} \\ S_{y_0, x_0} & S_{y_0, y_0} \end{vmatrix} = 0. \quad (3,15)$$

Wenn man nach (3,8) für x_0, y_0 die Bahngleichungen einsetzt, stellt $D = 0$ die Gleichung einer Fläche im Raum der z, x, y dar. Wir behaupten, daß diese Fläche die Kaustikfläche des unendlich fernen Punktes ist, der in der durch $(-c, -a, -b)$ gekennzeichneten Richtung liegt. Wir beweisen dies einfach so. Wir betrachten die Objektebene z_0 als Blendenebene, den angegebenen unendlich fernen Punkt als Gegenstandspunkt; dann ist die Kaustikfläche dieses unendlich fernen Punktes definiert als Fläche der Schnittpunkte benachbarter Elektronenbahnen, die vom gleichen Anfangspunkt herkommen (das heißt gleichen Anfangsimpuls haben). Ganz analog zur gewöhnlichen Kaustik⁹ gehen wir von (3,8) aus und bilden die totale Ableitung, wobei z_0, a, b, z, x, y festbleiben sollen (gleicher Anfangsimpuls, gleicher Endpunkt). Wir erhalten dann das Gleichungssystem

$$\frac{\partial a}{\partial x_0} \cdot dx_0 + \frac{\partial a}{\partial y_0} \cdot dy_0 = 0; \quad \frac{\partial b}{\partial x_0} \cdot dx_0 + \frac{\partial b}{\partial y_0} \cdot dy_0 = 0 \quad (3,16)$$

und dieses Gleichungssystem hat eine nichttriviale Lösung nur unter der Bedingung (3,15) w. z. b. w.

Bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung in S (Paraxialgebiet) schrumpft diese Kaustik auf einen Punkt in der FRAUNHOFER-Ebene zusammen. Diese Kaustik des unendlich fernen Punktes hat natürlich sehr ähnliche Eigenschaften wie die gewöhnliche Kaustik, so daß wir die hier interessierenden Eigenschaften sofort angeben können. Im Falle der Beschränkung auf Glieder vierter Ordnung im Eikonal (SEIDEL'Sches Gebiet) besteht diese Kaustik aus zwei sich durchsetzenden Kaustikmänteln, deren jeder eine Kaustikspitze hat. Die Distanz

⁹ E.O. XX. S. 428 ff.

zwischen den beiden Ebenen $z = \text{const.}$, die Tangentialebenen an die beiden Kaustikmntel sind, ist klein von zweiter Ordnung in x_0, y_0 , die Ausdehnung der Kaustik senkrecht zur z -Achse ist klein von dritter Ordnung. Auf den Kaustikflchen wechselt im allgemeinen die Determinante D das Vorzeichen. Außerhalb der gemeinsamen äußeren und innerhalb der gemeinsamen inneren Umhüllung der Kaustikmntel muß auf der z -Achse $D > 0$ sein. Da im Raum der z, x, y für den Bereich von z -Werten groer als der z -Wert der hinteren Kaustikspitze D sein Vorzeichen nicht wechselt, muß hier überall $D > 0$ sein, analog im Gebiet zwischen Objektelebene und Kaustik, das innerhalb der gemeinsamen inneren Umhüllung der Kaustikmntel liegt. Wir setzen weiter fest, daß wir im folgenden nur Aufpunkte $P(z, x, y)$ betrachten, für die $D > 0$ ist.

Die hauptsächlich interessierende Frage, wieviele Lösungen der Form (3,8) das Gleichungssystem (3,5) hat, konnte nicht mathematisch exakt geklärt werden, da hierzu weitreichende Untersuchungen über die Eindeutigkeit eines Variationsproblems für das gemischte Eikonal $T(z_0, p_{z_0}, p_{y_0}, z, x, y)$ im Großen, die Gestalt von Lsungsflchen von Lösungen der HAMILTON-JACOBISCHEN Differentialgleichung (2,10) (Untersuchung der Frage, unter welchen Bedingungen die Lsungsflchen $S = \text{const.}$ nur elliptische Flächenpunkte enthalten), bzw. die Zahl der reellen Lösungen eines Systems von zwei Gleichungen $2n - 1$ -ter Ordnung von zwei Variablen x_0, y_0 (z. B. dritten Grades für das SEIDELSCHE Gebiet) notwendig wären.

Es ist jedoch aus folgenden Gründen plausibel anzunehmen, daß in einem elektrisch-magnetischen Feld, das als Abbildungsfeld für Elek-

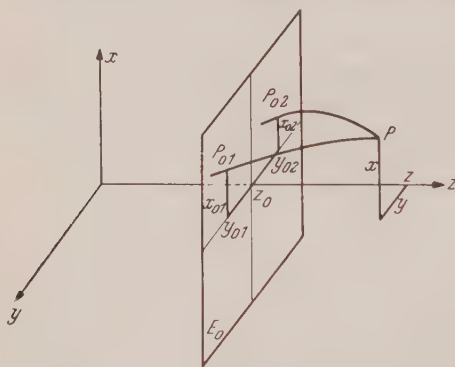


Abb. 4. Zur Diskussion von (3,5)

tronenmikroskope geeignet ist, das Gleichungssystem (3,5) in einem Gebiet des z, x, y Raumes, in dem für einen vorgegebenen Anfangsimpuls a, b, c immer $D > 0$ ist und wenn x_0, y_0 kleine Groen sind (Objektfeld begrenzt) nur eine Lösung (3,8) hat, wenn (3,7) nur eine Lösung hat. Mathematisch wäre das Problem etwa durch Annahme gewisser einschränkender Bedingungen über die zuzu-

lassenden Felder [ber $\varphi(z, x, y)$ und $\mathfrak{A}(z, x, y)$] weiter zu behandeln.

a) Hätte das System (3,5) mehrere Lösungen der Form (3,8), so könnten für $D \neq 0$ keine zwei dieser Lösungen unmittelbar benachbart sein, entsprechend den Überlegungen zu (3,9). Wären jedoch zwei Lösungen nicht unmittelbar benachbart, so ergäbe sich bei einem Abbildungs-

vorgang das Paradoxon, daß zwei nicht unmittelbar benachbarte Punkte der Objektebene auf einen Punkt der Aufebene abgebildet werden, was das System für einen Abbildungsvorgang unbrauchbar machen würde (Abb. 4).

b) Bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung in S hat das System (3,5) nur eine Lösung. Wenn daher die Bildfehler, die die Größe S_4 bestimmen, genügend klein sind, ist es plausibel anzunehmen, daß das System (3,5) im SEIDELschen Gebiet nur eine Lösung hat. Damit hängt zusammen:

c) Entsprechend der Bedeutung der Flächen $S(z_0, x_0, y_0, z, x, y) = \text{const.}$ (z_0, x_0, y_0 fest) als Wirkungsflächen müssen diese Flächen für Aufpunkte zwischen der Objektebene und der Kaustik (3,15) im wesentlichen konkav gegen $P_0(z_0, x_0, y_0)$ sein, für Aufpunkte zwischen Kaustik und GAUSSscher Bildebene im wesentlichen konvex gegen $P_0(z_0, x_0, y_0)$, oder mit anderen Worten, das durch (3,5) mit festem a, b, c definierte Bündel von Elektronenbahnen muß in der Nähe der Objektebene gegen die Kaustik (3,15) konvergieren, für Aufpunkte zwischen Kaustik (3,15) und GAUSSscher Bildebene in genügender Entfernung von der Kaustik (3,15) sicher divergieren. Daher muß für Aufpunkte in der Nähe der Objektebene, bzw. der GAUSSschen Bildebene die Fläche $S(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}, z, x, y) = \text{const.}$ (z, x, y fest, $\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}$ variabel) lauter elliptische Flächenpunkte haben. Da die Gl. (3,5) geometrisch aber nichts anders als die Berührungsbedingung der Fläche

$$S(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}, z, x, y) = \text{const.} \quad (3,17)$$

mit der durch die Normale a, b, c gekennzeichneten Ebene in einem Punkte der Ebene E_0 $\bar{z} = z_0, \bar{x} = x_0, \bar{y} = y_0$ ist, kann es nur eine Lösung von (3,5) geben, da eine Fläche mit lauter elliptischen Flächenpunkten eine Ebene nur in einem Punkte berühren kann. Für Aufpunkte z, x, y im Gebiet der Kaustik (3,15) kann (3,17) sicherlich hyperbolische Flächenpunkte enthalten, es kann daher die angegebene Ebene entweder eine Fläche (3,17) mehrfach oder mehrere der Flächen (3,17) berühren, das heißt es gibt dann mehrere Punkte stationärer Phase erster Art x_0, y_0 zu einem Aufpunkt $P(z, x, y)$.

d) Für etwaige mehrere Lösungen des Systems (3,5) ist nur ein kleiner Bereich der x_0, y_0 Ebene zur Konkurrenz zugelassen, denn das Objektfeld eines Elektronenmikroskops ist stark begrenzt, das heißt es ist möglich, daß dieser zugelassene Bereich eine Teilmenge der „unmittelbaren Umgebung“ im Sinne von (3,9) ist.

e) Für eine Variable kann der oben angeführte Satz bewiesen werden. Wenn

$$a = a(z_0, x_0, z, x, y) \quad (3,18)$$

zwei Lösungen im Sinne von (3,8) hat, also mit $x_{01} \neq x_{02}$

$$a = a(z_0, x_{01}, z, x, y); \quad a = a(z_0, x_{02}, z, x, y) \quad (3,19)$$

gilt, so muß es nach dem Satz von ROLLE ein x_0 mit $x_{01} \leq x_0 \leq x_{02}$ geben, so daß

$$\frac{\partial a}{\partial x_0} = 0 \quad (3,20)$$

ist.

Für rotationssymmetrische Abbildungsfelder, wie sie hier vor allem interessieren, muß es aber für Meridianbahnen möglich sein, durch Transformation von x, y die Gln. (3,7) auf eine Gestalt zu bringen, daß die Gleichung für a, y_0 , die für b, x_0 nicht explizit enthält. Aus der Definition einer Meridianbahn folgt nämlich, daß für $z = z_0$ gelten muß $p_\varphi^0 = (b \cdot x_0 - a \cdot y_0)/r_0 = 0$, also $a/x_0 = b/y_0$. Da hier nur Bahnen mit $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$ zur Konkurrenz zugelassen sind, muß $a = b = 0$ sein. Man kann für die Berechnung daher ein Bündel von Meridianbahnen herausgreifen, indem man $a/x_0 = b/y_0$ gleich einer von x_0, y_0 unabhängigen Größe setzt, womit also die gewünschte Darstellung gefunden ist.

In diesem Fall zerfällt das System (3,7) in zwei voneinander unabhängige Gleichungen und die Determinante (3,9) hat die Form

$$D = \frac{\partial a}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial b}{\partial y_0}. \quad (3,21)$$

Auf jede der beiden Gleichungen kann der Satz von ROLLE angewendet werden. Wenn D für einen Aufpunkt P nicht verschwindet, muß

$$\frac{\partial a}{\partial x_0} \neq 0; \quad \frac{\partial b}{\partial y_0} \neq 0$$

sein, das heißt es gibt nur eine Lösung. Damit ist der Satz im Spezialfall $a = b = 0$ und rotationssymmetrischer elektrisch-magnetischer Felder streng bewiesen.

Die angeführten Argumente machen es wahrscheinlich, wenn auch mathematisch unbewiesen, daß bei einer bestimmten Auswahl elektrischer und magnetischer Felder der Satz auch im allgemeinen zu Recht besteht, daß also das System (3,8) in einem Gebiet, in dem $D > 0$ ist und in dem (3,7) eindeutig ist (zu einem Anfangs- und Endpunkt gehört nur ein möglicher Anfangsimpuls) ebenfalls eindeutig ist.

Da jedoch aus den gleichen Gründen wie bei c.) (3,7) nur für einen vor der Kaustik

$$\begin{vmatrix} S_{x_0, x} & S_{x_0, y} \\ S_{y_0, x} & S_{y_0, y} \end{vmatrix}^{-1} = 0 \quad (3,22)$$

liegenden Aufpunkt $P(z, x, y)$ eine eindeutige Lösung nach x, y hat, kann die Eindeutigkeit der Auflösung von (3,7) nach (3,8) nur bis zur Kaustik (3,22) angenommen werden, da nur bis zur Kaustik (3,22), (3,7) eindeutig ist. In der Nähe dieser Kaustik und auf der Kaustik selbst können Schwierigkeiten auftreten, da dort das Eikonal $S(P_0, P)$ nicht eindeutig, die Reihenentwicklung von S nach Potenzen von x, y, x_0, y_0 nicht mehr gültig ist (Darstellung für S ergibt Singularitäten). Es ist wahrscheinlich, daß S wegen seiner Mehrdeutigkeit als Funktion von x_0', y_0' in diesem Bereich durch Einführung neuer Koordinaten (z. B.

Koordinaten in einer Blendenebene z_b, x_b, y_b) wieder eindeutig gemacht werden muß. Dadurch erhält man dann für S Reihenentwicklungen, die im Gebiet der Kaustik (3,22) wieder konvergieren. Bei Beschränkung auf das Paraxialgebiet schrumpft die Kaustik (3,22) auf einen Punkt in der GAUSSschen Bildebene zusammen und die Methode der stationären Phase ist auch für Aufpunkte in der GAUSSschen Bildebene noch anwendbar. Im SEIDELschen Gebiet ist dies nach obigem fraglich und müßte genauer untersucht werden.

§ 4. Über die physikalische Bedeutung der Methode der stationären Phase.

Es sollen jetzt die Ergebnisse der Methode der stationären Phase auf die Berechnung des Integrals (2,47) angewendet werden. Zunächst soll die physikalische Bedeutung dieser Ergebnisse diskutiert werden.

Wir denken uns im folgenden, wie bereits in § 3 angedeutet, $\psi(P_0) \neq 0$ nur in einem endlichen, von der geschlossenen Berandungskurve $S(B)$ begrenzten Gebiet B der Ebene E_0 . Dies bedeutet also physikalisch nicht eine kontinuierliche Abschattung, wie dies bei einem Elektronenstrahlbündel mit einer bestimmten Strahlungscharakteristik zutrifft, sondern eine Abschattung durch Verwendung einer in E_0 liegenden materiellen Blende mit $S(B)$ als Blendenrand. Wir legen durch sämtliche Punkte der Berandung $S(B)$ die geometrisch-optischen Bahnen, die den Gln. (3,5) entsprechen. Die Gesamtheit aller dieser Elektronenbahnen bestimmt im Raume der z, x, y eine Fläche, die geometrisch-optische Schattenfläche; der Schnitt dieser Fläche mit einer Ebene $z = \text{const.}$ ist die geometrisch-optische Schattengrenze für einen Aufpunkt in dieser Ebene $z = \text{const.}$ Durch die geometrisch-optische Schattenfläche wird der Halbraum $z \geq z_0$ in zwei Teilräume zerlegt, einen Lichtraum und einen Schattenraum, eine Ebene $z = \text{const.}$ also in zwei Gebiete, ein Lichtgebiet und ein Schattengebiet. Der Lichtraum ist dadurch gekennzeichnet, daß mindestens einer der einem Punkte $P(z, x, y)$ dieses Lichtraumes nach (3,5) zugeordneten Punkte stationärer Phase erster Art in B liegt, der Schattenraum, daß alle außerhalb von B liegen.

Da nach Satz 3.) und 4.) die Auswertung des Integrals (2,52) zwei Anteile ergibt, den Anteil der Punkte stationärer Phase erster Art in B und den Anteil der Randpunkte, haben wir für den Lichtraum und den Schattenraum für $\psi(z, x, y)$ zwei verschiedene Darstellungen, da im Schattenraum keine Punkte stationärer Phase erster Art, die in B liegen, vorhanden sind.

Der Beitrag V , der Punkte stationärer Phase erster Art entspricht der „Energie“, die auf der „direkten geometrisch-optischen Bahn“ des nach § 2 dem wellenmechanischen Problem zugeordneten klassisch-mechanischen Problems fortgepflanzt wird, der Beitrag R des Randes der „Energie“, die durch Beugung der Welle am Rand $S(B)$ zum Aufpunkt

gelangt. Wir haben daher für den Licht- und Schattenraum die Darstellungen

$$\psi = \psi_{\text{geom. opt.}} + \psi_{\text{diff.}}, \quad (4,1)$$

bzw.

$$\psi = \psi_{\text{diff.}} \quad (4,2)$$

$\psi_{\text{geom. opt.}}$ wird dargestellt durch eine mit $\hbar \rightarrow 0$ asymptotische Reihenentwicklung, die nach Potenzen

$$\hbar^k \quad k = 0, 1, 2 \quad (4,3)$$

fortschreitet. $\psi_{\text{geom. opt.}}$ ergibt daher nicht nur die Intensität des zugeordneten klassisch-mechanischen Problems (Intensitätsverteilung, die der geometrischen Elektronenoptik entspricht), sondern allgemein die Intensität der Wellenfortpflanzung auf der „durchgehenden Bahn“.

$\psi_{\text{diff.}}$ stellt sich als Summe von Integralen über den Rand dar, die nach Satz 4.) nach der Methode der stationären Phase ausgewertet, Beiträge der Punkte stationärer Phase zweiter Art und Beiträge der „Unstetigkeitspunkte“ der Berandung [s. (2,66) ff.] ergeben. Die asymptotischen Reihenentwicklungen schreiten im einfachsten Falle (s. S. 63, $n_i = 2$) nach Potenzen

$$\hbar^{k+1/2} \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (4,4)$$

für die Punkte stationärer Phase zweiter Art und nach Potenzen

$$\hbar^{(k+1)/2} \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (4,5)$$

für die Beiträge der Unstetigkeitspunkte von $S(B)$ fort ^{10, 11}.

Liegt der Aufpunkt $P(z, x, y)$ direkt auf der geometrisch-optischen Schattenfläche (Punkt stationärer Phase dritter Art), so gilt:

$$\psi = \psi_{\text{geom. opt.}} + \psi_{\text{diff.}}, \quad (4,6)$$

wobei $\psi_{\text{geom. opt.}}$ eine nach Potenzen

$$\hbar^{k/2} \quad k = 0, 1, 2 \quad (4,7)$$

fortschreitende asymptotische Reihe ist.

Die Anteile der Punkte stationärer Phase erster, zweiter und dritter Art, sowie der Unstetigkeitspunkte von $S(B)$ können physikalisch als Wellen, die von den dem betreffenden Aufpunkt zugeordneten Punkten stationärer Phase erster, zweiter und dritter Art, bzw. den Unstetigkeitspunkten von $S(B)$ ausgehen, gedeutet werden. Die Beugungserscheinung läßt sich daher mit Hilfe der Methode der stationären Phase als Interferenzerscheinung dieser verschiedenen Wellen darstellen. Die Methode der stationären Phase zeigt somit, daß die Interferenz der von allen Punkten des Bereiches B der Objektebene ausgehenden, sich in alle Richtungen ausbreitenden Wellen asymptotisch für $\hbar \rightarrow 0$ so erfolgt, daß die Wellenausbreitung nach Elektronenbahnen

¹⁰ BREMMER, On the asymptotic evaluation of diffraction integrals, *Physica* XVIII, 1948, Nr. 6—7.

¹¹ VAN KAMPEN, Über eine asymptotische Entwicklung von Beugungsproblemen, *Physica* XIV, 1948—49, S. 575 ff.

vor sich geht und von den $\propto^2$ Elektronenbahnen, die mit verschiedener Anfangsrichtung durch jeden Punkt der Objektebene hindurchgehen, genau eine Bahn mit einer bestimmten Anfangsrichtung in bestimmten Punkten der Objektebene zur Intensität einen Beitrag liefert.

Die Richtung dieser zur Konkurrenz zugelassenen Elektronenbahnen, deren Anfangspunkt der Punkt stationärer Phase erster, zweiter oder dritter Art, der zum Aufpunkt zugeordnet ist, bzw. ein Unstetigkeitspunkt von $S(B)$ ist, ist im Falle, daß es sich um einen Punkt stationärer Phase erster oder dritter Art handelt, durch die Richtung der einfallenden Welle gegeben. Wenn es sich um einen Punkt stationärer Phase zweiter Art oder einen Unstetigkeitspunkt handelt, hängt die Anfangsrichtung der „einen Beitrag liefernden“ Elektronenbahn von der Richtung der einfallenden Welle, vom Punkt-Punkteikonale und von der Berandungskurve $S(B)$ ab, so daß man wegen der Richtungsänderung der „einen Beitrag liefernden“ Elektronenbahn auf $S(B)$ von einer Brechung der Strahlen auf $S(B)$ sprechen könnte.

Wenn man für ψ die asymptotischen Reihen einsetzt, so erhält man für J_z eine im allgemeinen nach Potenzen $\hbar^{k/2}$ $k = 0, 1, 2$ fortschreitende Reihenentwicklung. Wenn man dann den Grenzübergang $\hbar \rightarrow 0$ durchführt, so bleibt von den Beiträgen der Reihen nach (4,3), (4,4), (4,5), (4,7) nur das erste Glied der Reihen nach (4,3), (4,7) übrig, während alle anderen Glieder verschwinden. Es ergibt also, wie bekannt, in der geometrischen Optik nur ein Punkt stationärer Phase erster Art für den Lichtraum, bzw. ein Punkt stationärer Phase dritter Art für die geometrisch-optische Schattenfläche zur Intensität im Aufpunkt einen Beitrag, während die Beiträge der Punkte stationärer Phase zweiter Art und der Unstetigkeitspunkte von $S(B)$ verschwinden.

Wie noch gezeigt werden wird, hängen die einzigen für $\hbar \rightarrow 0$ nicht verschwindenden Glieder von J_z nur von $\psi_0(x_0, y_0)$ (x_0, y_0 Punkt stationärer Phase erster oder dritter Art) ab, während die Ableitungen von ψ_0 nach x_0, y_0 an diesen Stellen nicht vorkommen, das heißt es „strahlt“ im Falle der geometrischen Elektronenoptik nur der „Punkt“ stationärer Phase erster oder dritter Art aber nicht dessen Umgebung und nicht der Rand $S(B)$.

Die Modifikation der Intensitätsverteilung durch die Wellenmechanik besteht darin, daß $\psi(P)$ nicht mehr nur von $\psi_0(x_0, y_0)$, sondern auch von dessen Ableitungen nach x_0, y_0 abhängt, also von der Intensitätsverteilung auch einer gewissen Umgebung des Punktes stationärer Phase erster Art, bzw. dritter Art, und daß die Berandung $S(B)$ einen zusätzlichen Beitrag liefert.

Gl. (2,68) entspricht einer asymptotischen Umwandlung eines Flächenintegrals in einen Bestandteil, der von den Punkten stationärer Phase erster, bzw. dritter Art abhängt und ein Randintegral über die Berandung $S(B)$. Diese Zerlegung ist in Spezialfällen in der Licht-

optik bekannt^{12 13}. Insbesondere zeigt KOTTLER in der zitierten Arbeit, daß unter gewissen Bedingungen für die einfallende Welle diese Zerlegung in durchgehende Welle und Beugungswelle für die Wellengleichung der Lichtoptik streng gilt. Dies könnte auch für die SCHRÖDINGERSche Wellengleichung gezeigt werden, wobei der Beweis ähnlich wie bei KOTTLER zu führen wäre. Der Beweis, auf den wir hier nicht näher eingehen wollen, beruht auf der Benützung des Satzes von der Erhaltung der Teilchenzahl. Da es jedoch für ein derartig kompliziert aufgebautes Integral wie (2,47) ohne stark einschränkende Bedingungen nicht möglich ist, diese Transformation streng durchzuführen, da sie auf die Auflösung einer Vektorgleichung vom Typus $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{b}$ nach $\mathbf{a}$ hinausläuft, wurde die Ableitung nach der Methode der stationären Phase gewählt, die mathematisch durchgeführt werden konnte. Sie entspricht zwar nur einer asymptotischen Umwandlung eines Flächenintegrals, da sie die angegebene physikalische Voraussetzung, die KOTTLER benützt, nicht benötigt, ist aber gerade aus diesem Grunde allgemeiner als die von KOTTLER durchgeführte Ableitung.

Die Anwendung dieser Theorie auf die Berechnung der Intensitätsverteilung in einem rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feld wird in einer weiteren Arbeit durchgeführt werden.

Literatur.

1. W. GLASER, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer, Wien 1952.
2. G. BRAUN, Wellenmechanische Elektronenoptik (Integration der SCHRÖDINGERSchen Wellengleichung mit Hilfe asymptotischer Reihen), Dissertation, Technische Hochschule Wien 1954.
3. V. D. CORPUT, Zur Methode der stationären Phase I, *Compositio mathematica* I, S. 15—38.
4. V. D. CORPUT, Zur Methode der stationären Phase II, *Compositio mathematica* III, S. 328—372.
5. E. HLAWKA, Über Integrale auf konvexen Körpern I, Monatshefte für Mathematik, Bd. 54 (1950), 1. Heft.
6. H. BREMMER, On the asymptotic evaluation of diffraction integrals, *Physica* XVIII, Nr. 6—7 (1948).
7. VAN KAMPEN, Über eine asymptotische Entwicklung von Beugungsproblemen, *Physica* XIV, S. 575 ff.
8. RUBINOWICZ, Die Beugungswelle in der KIRCHHOFFSchen Theorie der Beugungserscheinungen, *Ann. d. Physik* 53, S. 258, 1917.
9. RUBINOWICZ, Zur KIRCHHOFFSchen Beugungstheorie, *Ann. d. Physik* 73, S. 339, 1924.
10. KOTTLER, Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen, *Ann. d. Physik* 70, S. 405, 1923.

Wien, Institut für angewandte Physik
der Technischen Hochschule, Mai 1954.

¹² RUBINOWICZ, Die Beugungswelle in der KIRCHHOFFSchen Theorie der Beugungserscheinungen, *Ann. d. Physik* 53 (1917), S. 258. RUBINOWICZ, Zur KIRCHHOFFSchen Beugungstheorie, *Ann. d. Physik* 73 (1924), S. 339.

¹³ KOTTLER, Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen, *Ann. d. Physik* 70 (1923), S. 405.

Über eine Eigenschaft der Poiseuilleschen Strömung.

Von

Theodor Sexl

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

(Eingelangt am 26. Juni 1954.)

Theorem: Die unter Einwirkung eines konstanten Druckgefälles an den Rohrenden zustandekommende stationäre Bewegung einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit in einem kreiszylindrischen Rohr (POISEUILLESche Strömung) ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihre Energiedissipation kleiner ist als die irgend einer anderen Bewegung mit demselben Wert des Flusses durch das Rohr und der Bedingung des Haftens der Flüssigkeit an der Rohrwand.

Beweis: Läßt man die z -Achse eines Zylinderkoordinatensystems (z, r, φ) mit der Rohrachse zusammenfallen, so beträgt¹ die gesamte Energiedissipation pro Zeiteinheit und pro Längeneinheit des Rohres

$$2F = \int_0^a \mu \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 2\pi r dr,$$

wobei μ der Koeffizient der inneren Reibung der Flüssigkeit, w die Geschwindigkeitskomponente in der Rohrachse und a den Radius des Rohres bedeuten.

Es sei nun $w(r)$ eine gesuchte Funktion, welche 1. das Integral

$$\int_0^a \mu w'^2 2\pi r dr$$

zu einem Minimum macht, 2. denselben Fluß durch das Rohr ergibt wie bei der POISEUILLESchen Strömung, das heißt

$$\int_0^a w 2\pi r dr = \text{const.} = \pi a^2 \cdot \bar{w} = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l},$$

¹ Vgl. z. B. H. LAMB, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig, B. G. Teubner, 2. Aufl. 1931, S. 655.

wobei $(p_1 - p_2)/l$ das im Rohr von der Länge l herrschende Druckgefälle bedeutet, und 3. die Haftbedingung an der Rohrwand $w(a) = 0$ erfüllt.

Um diese Funktion zu finden, hat man nach LAGRANGE das Integral der Bedingung 2. mit einem Faktor λ zu multiplizieren und zu dem Integral der Bedingung 1. hinzuzufügen.

Man hat also die Extremale des Integrals

$$\int_0^a (\mu w'^2 + \lambda w) 2\pi r dr$$

zu finden. Diese wird geliefert durch die EULERSche Differentialgleichung des Problems

$$\frac{\partial}{\partial w} (r \mu w'^2 + \lambda r w) - \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial w'} (r \mu w'^2 + \lambda r w) = 0,$$

das heißt

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{\lambda}{2\mu} r,$$

welche Differentialgleichung mit derjenigen für die POISEUILLESche Strömung identisch ist², wenn $\frac{\lambda}{2} = -\frac{p_1 - p_2}{l}$ gesetzt wird; q. e. d.

² Vgl. H. LAMB, l. c. S. 661.

Buchbesprechungen.

Angewandte Mathematik. Herausgegeben von A. WALTHER. Band 3, Teil I. — Band 4, Teil II. („Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946.“ Für Deutschland bestimmte Ausgabe der FIAT Review of German Science.) IV + II, 307 + 161 S. Weinheim a. d. Bergstraße: Verlag Chemie, G. m. b. H. 1953.

Der I. Teil der hier vorliegenden Fiatberichte behandelt die Methoden der praktischen Analysis, konforme Abbildung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik, Statistik und ihre Anwendungen, Darstellende Geometrie, Vektor- und Tensorrechnung. Dazu kommen noch die Berichte über Chiffrieren und Verfolgungskurven. Der zweite Teil bringt aus dem Gebiet der technischen Mechanik folgendes: Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, Schwingungen, Spannungsoptik, Fahr- und Flugmechanik, Regelung und Steuerung, Flügelflattern u. a.

Die Berichte enthalten viel wichtiges Material, welches bisher nicht oder nur teilweise im Druck erschienen ist.

Der Herausgeber hat zu diesen Berichten, welche über den zeitbedingten Zweck hinaus Bedeutung besitzen, eine interessante Einleitung geschrieben.

E. HLAWKA, Wien.

Microwave Lenses. Von J. BROWN. (Methuen's Monographs on Physical Subjects. Herausgegeben von B. L. Worsnop.) Mit Textabb., XI, 125 S. London: Methuen & Co. Ltd. — New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1953. Geb. 8 s. 6 d. net.

Das Büchlein, das in der Größe etwa einem Göschenband entspricht, gibt einen guten Überblick über den derzeitigen Entwicklungsstand der Linsen für cm- und dm-Wellen, sowie über die Schwierigkeiten, die dabei noch nicht überwunden wurden. Die mathematischen Hilfsmittel, die ja zu einem tieferen Verständnis dieses Gebietes unerlässlich sind, wurden auf ein Minimum beschränkt und man ist immer wieder erstaunt, mit wie wenig rechnerischem Aufwand der Autor die Eigenarten der verschiedenen Linsen erläutert. Unseren mit cm- und dm-Wellen arbeitenden Physikern kann das Büchlein deshalb empfohlen werden, weil es einen bequemen Einblick in einen Forschungszweig erlaubt, der erst seit wenigen Jahren aktuell ist und sich aus nachkriegsbedingten Gründen vor allem in den angelsächsischen Ländern entwickeln konnte.

K. STUHLIK, Graz.

The Auger Effect and other Radiationless Transitions. Von E. H. S. BURHOP. Cambridge Monographs on Physics. Herausgegeben von N. Feather und D. Shoenberg.) Mit 49 Textabb., XIV, 188 S. Cambridge: At the University Press. 1952. Geb. 27 s. 6 d. net.

Die spontane Elektronenemission röntgenangeregter Atome ist 1923 durch ROBINSON entdeckt worden, jedoch haben erst Versuche von AUGER, der den Einzelprozeß dieser strahlungslosen Vorgänge 1925 in der WILSON-Kammer aufzufand, den Namen der Erscheinung festgelegt. Ihre nähere Verfolgung ergab alsbald, daß ihr im Bereiche der Röntgenenergien keine geringere Rolle zukommt als den strahlungsbedingten Atomvorgängen der Röntgenspektren. Indem durch den

AUGER-Effekt doppelt und noch höher ionisierte Zustände der inneren Elektronenschalen geschaffen werden, bringen sie Ausgangszustände für neue strahlungsbedingte Röntgenübergänge hervor, die Röntgen-, „funkenlinien“ oder Satelliten der normalen Röntgenspektren. Die Gemeinsamkeit der Ausgangszustände für die Emission von Röntgenlinien und von AUGER-Elektronen besagt aber auch, daß die Häufigkeit der strahlungslosen Vorgänge für die Ausbeute der Linienproduktion maßgebend ist. Diese intime Verflechtung röntgenspektroskopischer Fragen mit dem AUGER-Effekt könnte eine gemeinsame Darstellung beider Gebiete nahelegen. Der Verfasser hat es demgegenüber verstanden, seine Darstellung auf ein Minimum als bekannt vorausgesetzter Tatsachen der Röntgenspektroskopie zu gründen, so daß dem Leser dadurch keine fühlbaren Abschweifungen zugemutet sind. Die Eigenständigkeit des behandelten Gebietes wird vielmehr dadurch unterstrichen, daß die Ausgangssituation des AUGER-Effektes ja auch noch anderweitig zustande kommen kann, nämlich bei der Ionisation innerer Elektronenschalen durch Elektronenstoß, bei der sogenannten inneren Umwandlung der Kerngammastrahlung in der Elektronenhülle, und bei der Kernumwandlung durch Einfang von Hüllenelektronen. Damit lag es nahe, gewissermassen anhangsweise auch auf die strahlungslosen Hüllenvorgänge der spontanen Umwandlungen angeregter Atome und Moleküle einzugehen, die der Autoionisation des Heliums und der Prädissoziation mehratomiger Moleküle zugrunde liegen. Der Verfasser hat es vorgezogen, diesen Anhang an den Schluß des Büchleins zu verlegen und der Behandlung der Gammastrahlungsumwandlung jene von zwei weiteren Typen von Kernvorgängen anzuschließen, der mit der Erzeugung und Vernichtung von Elektronenpaaren sowie der mit dem Mesoneneinfang durch Kerne verknüpften Umwandlungsprozesse.

Die Stoffverteilung ist durch eine gewisse Bevorzugung theoretischer Gesichtspunkte und Ergebnisse mitbestimmt. Der einleitenden Übersicht (10 Seiten) folgt die Theorie des AUGER-Effektes (12 Seiten) und erst anschließend die Schilderung von Methodik und experimentellen Ergebnissen (41 Seiten) sowie der Beziehungen zu den Röntgenspektren (34 Seiten). Auch in der Behandlung der Gamma-Umwandlungserscheinungen (46 Seiten) sind die theoretischen Aussagen vorweggenommen, im Kapitel über die Paarerzeugung und -Vernichtung (18 Seiten) wird auf die experimentelle Methodik nur flüchtig hingewiesen. Zum Umfang des Abschnittes über Mesoneneinfang (9 Seiten) ist hervorzuheben, daß das Buch bereits im Dezember 1950 abgeschlossen wurde.

Die Orientierung nach theoretischen Gesichtspunkten ermöglichte eine bemerkenswerte Straffheit und Einheitlichkeit der Darstellung, die überall klar und leicht lesbar ist. Das Literaturverzeichnis umfaßt 316 Zitate und scheint keine Vollständigkeit angestrebt zu haben; es ist bezüglich der einschlägigen deutschen Veröffentlichungen unvollständig. Druck und Ausstattung des Buches sind sehr gut.

Daß eine ausführlichere Behandlung der strahlungslosen Molekülvorgänge sowie der strahlungslosen Stoßvorgänge I. und II. Art nicht zum Plane des Buches gehört, dürfte auch die Frage unterdrückt haben, welche Gegenvorgänge den behandelten Spontanprozessen bei Wärmegleichgewicht zugehören. Der Umkehrung spontaner Paarbildungen entspricht ja eine strahlungslose Vereinigung der betreffenden Partner im Zweierstoß, ein Vorgang, dem wegen der Bedingungen der Energie- und Impulserhaltung im allgemeinen keine endliche Wahrscheinlichkeit zugeschrieben wird.

A. SMEKAL, Graz.

Elektronenemission, Elektronenbewegung und Hochfrequenztechnik. Herausgegeben von G. GOUBAU und J. ZENNECK, unter Mitarbeit von W. BECKER, B. BECKMANN, W. BÜRCK, R. FELDTKELLER, K. FRÄNZ, G. GOUBAU, P. V. HANDEL, R. HONERJÄGER, W. KROEBEL, H. MEINKE, R. MÜLLER, W. PFISTER, A. SCHEIBE,

wird die deutscherseits durchgeführte Grundlagenforschung aus der Zeit 1939—1945, und zwar vor allem in Hinsicht auf Elektronenoptik, Bildabtaster, Leuchtschirme für verschiedenste Verwendungszwecke und Verbesserungen der Schaltungselemente und -prinzipie. Im allgemeinen sind es weniger physikalische Fortschritte als elektrotechnische und konstruktive Verfeinerungen. — 9. Hochfrequenzmeßtechnik (SCHMELZER, SCHEIBE, KROEBEL, WEISSFLOCH, THEILE, STENZEL): Der äußerst umfangreiche Abschnitt, durch zahlreiche Literaturhinweise ergänzt, behandelt alle Messungen mit Hochfrequenz, beginnend mit Meßsendern und Frequenzmessung, fortfahrend mit Impedanzmessungen, Hochfrequenzoszillographie, Feldmessungen und mit der Messung von Materialkonstanten mittels Hochfrequenz schließend.

Ganz allgemein kann über das Buch gesagt werden, daß es gemeinsam mit seinem ersten Teil eine übersichtliche Zusammenstellung der deutschen Forschungsergebnisse während des Krieges bringt. Gerade auf dem Gebiet der Höchsthochfrequenztechnik, die ja in den letzten Jahren solch eine stürmische Weiterentwicklung erfuhr, gestattet es interessante Vergleiche mit dem heutigen Stand, wodurch ein schöner Einblick in den Entwicklungsprozeß der physikalischen Forschung auf diesem Gebiete gegeben wird. Die reichlichen Literaturangaben erhöhen außerdem den Wert des Buches beim praktischen Gebrauch.

K. OROSZY, Graz.

Theorie der chemischen Bindung auf quantentheoretischer Grundlage. Von H. HARTMANN. („Struktur und Eigenschaften der Materie in Einzeldarstellungen.“ Begründet von M. Born und J. Franck. Herausgegeben von S. Flügge: Band XXI.) Mit 53 Textabb., VII, 357 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 46.80.

Das eben erschienene Werk aus der bekannten Sammlung: Struktur und Eigenschaften der Materie in Einzeldarstellungen vereinigt die Vorzüge eines Lehrbuches mit denen einer Monographie. Es bringt zuerst im Abschnitt A die quantenmechanischen Grundlagen der chemischen Bindung. Nach einer kurzen Einführung in die Quantentheorie, wobei alles Wesentliche über Operatoren, Matrizen, Eigenzustände etc. in prägnanter Form auseinandergesetzt wird, werden die Näherungsmethoden erörtert. Zuerst bringt der Verfasser die gewöhnliche quantenmechanische Störungstheorie für den nichtentarteten und entarteten Fall. Dann erörtert er das Variationsverfahren, wobei besonders das Säkularproblem behandelt wird. Dann wendet er sich den gruppentheoretischen Methoden zu, welche heute auch bei theoretischen Chemikern beliebt sind. In diesem Punkt unterscheidet sich das vorliegende Werk ganz besonders von der „Einführung in die Quantenchemie“ von H. HELLMANN (Verlag Deuticke, 1937). In übersichtlicher Weise ist hier alles nötige Rüstzeug zusammengestellt um selbständig Probleme lösen zu können. Insbesondere ist hier der Reduktion von Darstellungen ein breiter Raum gewidmet, in welchem die Bestimmung der Charaktere, der Basis zu verschiedenen irreduziblen Darstellungen usw. Behandlung finden. Dann folgt eine Übersicht über die wichtigsten Einkörperprobleme. Hierauf wird an das Mehrkörperproblem herangegangen, welches unter Zugrundelegung der SCHRÖDINGER-Gleichung erörtert wird. Die Behandlung des Spins unter Verwendung von Operatoren ist vollständig und ausreichend. Schließlich werden die Produkteigenfunktionen und ihre Integrale in sehr allgemeiner Form zusammengestellt. Im zweiten Teil B findet der Leser alles Wissenswerte über Atome, und zwar ausgehend vom Wasserstoff über die statistische Theorie zu den höheren Atomen. Dabei wird das periodische System an Hand der Wellenmechanik klar herausgearbeitet und eine quantitative Theorie der Atomzustände gegeben. Die im ersten Teil bereitge-

stellten Mittel gestatten eine Erörterung der SLATERSchen Theorie. Es folgen dann die Grundprobleme der chemischen Bindung, ausgehend von der Theorie von LONDON und HEITLER, sowie ein Abriß der Methode der Valenzstrukturen und Molekülzustände. Abschließend bringt der Verfasser noch einen Überblick über die Feldtheorie, in welchem das reelle und komplexe Materiefeld zu Worte kommt. Im dritten und speziellen Teil ist eine treffliche Auswahl von Anwendungen der Methoden auf speziellere Probleme getroffen worden. Es finden sich die wichtigsten Ergebnisse, welche die Aufwendung eines solchen mathematischen Apparates rechtfertigen. Ein Anhang ergänzt in mustergültiger Weise den Text, indem er speziellere Formeln und Methoden zur Auswertung der häufig vorkommenden Integrale zusammenstellt. Den Schluß bildet eine Übersicht über die wichtigsten Darstellungen des Gebietes.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das vorliegende Werk jedem theoretisch interessierten Chemiker wärmstens empfohlen werden und daß darüber hinaus auch der theoretische Physiker manche Anregung empfangen kann.

P. URBAN, Graz.

Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität. Von G. JAFFÉ. 211 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 9.60.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, in Dialogen zwischen einem Physiker und einem Philosophen die Grundkonzeptionen der neueren Physik herauszuarbeiten, beziehungsweise die Haltlosigkeit dagegen vorgebrachter Bedenken aufzuzeigen. Im ersten Teil wird das Wesen unserer räumlichen Anschauungsform diskutiert, vor allem in Hinblick auf eine mögliche Nichteuklidizität des Raumes. Der zweite Teil ist der relativistischen Zeitauffassung gewidmet. Der dritte erläutert Wahrscheinlichkeit und Determinismus in der klassischen und in der modernen Physik. Man kann den Darlegungen beipflichten — vielleicht bis auf einen Punkt, daß nämlich im dritten Abschnitt die Existenz einer Quantenelektrodynamik geleugnet wird.

Das Büchlein kann dem empfohlen werden, der sich ohne Mathematik prinzipiellen Einblick in die genannten Probleme verschaffen will.

K. BAUMANN, Wien.

The Stability of Rotating Liquid Masses. Von R. A. LITTLETON. Mit 19 Textabb., VII. 150 S. Cambridge: At the University Press. 1953. Geb. 35 s. net.

Die vorliegende Monographie gibt einen ausgezeichneten Überblick über dieses klassische Problem, das nicht nur aus kosmogonischem Interesse, sondern auch seiner mathematischen Schönheit wegen immer noch Beachtung verdient. Die Darstellung zeichnet sich durch eine hervorragende Klarheit und Übersichtlichkeit aus. Insbesondere werden die entscheidenden Begriffe der Stabilität mit großer Sorgfalt definiert und angewandt. Als wesentlich neuer Gesichtspunkt wird eine Entdeckung von E. CARTAN in die astronomische Literatur eingeführt, wonach die Serie der dreiachsigen JAKOBISchen Ellipsoide an ihrem ersten Verzweigungspunkt bereits völlig instabil wird.

Das eigentliche Anliegen des Verfassers ist die im letzten Abschnitt des Buches behandelte kosmogonische Anwendung der Theorie. Dabei kommt er zu dem Ergebnis, daß auf Grund der CARTANSchen Entdeckung der sogenannten Teilungshypothese zur Erklärung des Entstehens von Doppelsternsystemen von Seiten der dynamischen Theorie der Boden völlig entzogen werde. Lediglich zur Erklärung des Entstehens von Satellitensystemen glaubt er, der klassischen Vorstellung noch

eine Bedeutung belassen zu dürfen. Dieser Schluß des Verfassers sowie die damit verbundene Kritik an J. JEANS (cf. *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge 1929, Chap. VIII) erfordert jedoch vielleicht noch einige einschränkende Erläuterungen:

Nach der vorliegenden Theorie einer starr rotierenden, gravitierenden Masse homogener Dichte durchläuft diese mit zunehmendem Rotationsmoment eine Serie von Sphäroiden mit zunehmender Abplattung. Wenn in der Masse Reibungskräfte wirksam sind, werden diese sogenannten MACLAURINSchen Sphäroide von einem bestimmten Wert des Rotationsmomentes an „säkular“ instabil gegenüber Störungen zweiter Ordnung. Die Reibungskräfte bewirken dann, daß das System bei einer solchen Störung sich von seinem Gleichgewichtszustand entfernt und in die stabilere Konfiguration eines dreiaxigen Ellipsoides übergeht. Diese nun wieder stabilere Serie der sogenannten JAKOBISchen Ellipsoide erreicht bei weiter zunehmendem Rotationsmoment dann ihrerseits einen Verzweigungspunkt, an dem die Konfiguration säkular instabil wird gegenüber Störungen dritter Ordnung, zugleich aber auch — wie man jetzt gelernt hat — im gewöhnlichen Sinne instabil wird. Das heißt, die durch eine infinitesimale Störung verursachte Bewegung wird exponentiell in der Zeit zunehmen unabhängig davon, ob Reibungskräfte wirksam sind oder nicht, und in einem Ausmaß, das allein durch die Dimensionen des Systems gegeben ist. In dem Punkt, in dem die JAKOBISerie instabil wird, kreuzt sie die Serie der von POINCARÉ entdeckten birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren, die nach den bisherigen Untersuchungen die Tendenz haben, sich mit zunehmender Exzentrizität in zwei Teile abzuschnüren. Da die Serie aber säkular instabil ist und außerdem das Rotationsmoment von dem Verzweigungspunkt an abnimmt, wird sie von einer sich kontrahierenden Masse nicht als Serie durchlaufen werden können. Trotzdem wurde dies bisher als ein Hinweis dafür gewertet, daß das Ergebnis der nach Eintritt der Instabilität einsetzenden nicht näher zu beschreibenden Entwicklung die Teilung der Masse in zwei Teile sein würde, die sich dann auf angenäherten Kreisbahnen umeinander bewegen sollten. Dagegen wende der Verfasser ein, daß zufolge der völligen Instabilität im gewöhnlichen Sinne die Bruchstücke im Endeffekt hyperbolische Geschwindigkeit besitzen und sich unendlich weit voneinander entfernen müßten. Außerdem würde bei einer Teilung in zwei annähernd gleiche Massen das Doppelsternsystem mehr Drehimpuls besitzen als das ursprüngliche JAKOBISCHE Ellipsoid.

Trotzdem vor allem der erste Einwand formal richtig und sehr schwerwiegend ist, kann aus ihm die Unmöglichkeit der Entstehung eines Doppelsternsystems infolge Rotationsinstabilität einer sich kontrahierenden Masse noch nicht bewiesen werden. Wie denn aus einer so weitgehend idealisierten Theorie grundsätzlich nicht mehr als ein bloßer Hinweis erwartet werden kann. Das möge die folgenden Bemerkungen noch etwas deutlicher machen.

Zunächst gilt diese Theorie nur für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die zusätzliche Berücksichtigung der Konfigurationen kompressibler inhomogener rotierender Massen (vgl. JEANS l. c. Chap. IX) hätte zwar vielleicht die mathematische Geschlossenheit der vorliegenden Darstellung etwas gestört, wäre aber für die kosmogonische Diskussion doch sehr wünschenswert gewesen. Nähert man nämlich den kompressiblen Fall durch ein zusammengesetztes Modell an, bei dem die Instabilität nur in einem dichteren, quasi inkompressiblen Kern auftritt, so entfallen schon formal die beiden Haupteinwände des Verfassers. Denn wenn bei einer Teilung die beiden Kernbruchstücke zunächst auch hyperbolische Geschwindigkeit besitzen, so werden sie doch einige Energie an die mitzunehmende Hülle abgeben müssen, die ihnen ihrerseits einen zusätzlichen Drehimpuls zuführen kann, so daß die beiden Komponenten nicht unbedingt ins Unendliche ent-

weichen müssen, und die Entstehung eines stabilen Doppelsternsystems durchaus nicht ausgeschlossen erscheint. Andererseits aber ist nicht die Annahme der Inkompressibilität, das heißt einer homogenen Dichte die schwerwiegendste Einschränkung gegenüber der Wirklichkeit, sondern die Vernachlässigung des Energiestroms im Stern (vgl. JEANS l. c. Chap. X). Dieser verursacht nämlich in einem so rasch rotierenden Ellipsoid notwendig meridionale Zirkulationsströmungen, die ihrerseits eine nichtstarre Rotation bewirken. Für eine entsprechende hydrodynamische Theorie des Aufbaues und der Entwicklung sehr rasch rotierender Sterne existieren aber bisher erst einige Ansätze, die es noch nicht erlauben, mit Sicherheit zu entscheiden, welches das Schicksal einer sich kontrahierenden Gasmasse mit großem Gesamtdrehimpuls sein wird.

Wenn die kritischen Absichten des Verfassers auf kosmogonischem Gebiet auch zu keinem ganz überzeugenden Ergebnis führten, so sei doch dankbar hervorgehoben, daß sie ihn andererseits veranlaßt haben mögen, eine so ausführliche und schöne Darstellung der mathematischen Theorie zu geben.

ST. TEMESVÁRY, Göttingen.

Einführung in das Gebiet der mechanischen Schwingungen. Von G. W. VAN SANTEN.

Aus dem Holländischen übersetzt von P. E. KASSNER. Mit 216 Textabb., XV, 315 S. Eindhoven: N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken: Philips' Technische Bibliothek. 1954.

Dieses Werk, das in leicht verständlicher Weise geschrieben ist, entspricht allen Anforderungen, die man an eine Einführung stellt. Die mathematische Beschreibung der Vorgänge erfolgt vom Standpunkt der praktischen Anwendbarkeit aus, wozu die klare und anschauliche Deutung der mathematischen Ausdrücke sowie die geschickt gewählten Beispiele wesentlich mit beitragen.

So liefert etwa ein Abschnitt über die Fahrzeugfederung eine eindrucksvolle Anwendung der Theorie der Schwingungsisolierung. Neben der Untersuchung der Resonanzkurven wird der Fortpflanzung von Schwingungen ein breites Feld eingeräumt sowie auch Biege- und Torsionsschwingungen von Wellen mit ihren tabellarischen und graphischen Lösungsmethoden behandelt. Einen eigenen Abschnitt nehmen ferner die verschiedenen Ursachen der Dämpfung ein, an dessen Ende mehrere Arten zur Messung letzterer besprochen werden. Die verschiedenen Methoden des Auswuchtens sowie die Besprechung einiger besonderer Schwingungserscheinungen, wie Tragflächenschwingungen bei Flugzeugen, Flattern, durch Wind verursachte Drahtschwingungen, Kavitationsschwingungen und anderes runden die Arbeit nach der technischen Seite hin ab.

Erwähnenswert sind ferner die Analogiebetrachtungen zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen, vermöge deren komplizierte mechanische Schwingungen umgewandelt werden können und damit den Rechenmethoden der Wechselstromtechnik zugänglich sind.

Neben diesem theoretischen Teil findet sich ein rein praktischer, welcher von Schwingungsmeßgeräten, Hilfsmitteln und praktischen Anweisungen für Schwingungsmessungen handelt.

Weiters fehlt in dieser umfassenden Darstellung mechanischer Schwingungen auch nicht Schall, Ultraschall und Seismologie; über Gasschwingungen in Verbrennungsmotoren wird referiert. Auf mehrdimensionale Schwingungen wird nicht eingegangen.

Einige Punkte mögen abschließend noch hervorgehoben werden. So zeigt unter anderem die Vielzahl der Figuren und Kurven sowie die sehr begrüßenswerte Zusammenstellung der verwendeten Symbole die sorgfältigen didaktischen Überlegungen. Für die praktische Verwendung erweisen sich die beigelegten

Tabellen, wie z. B. für verschiedene Federkonstanten oder kritische Tourenzahlen von Stahlwellen, sehr nützlich. Die zitierte Literatur gestattet ein tieferes Eindringen in die Teilgebiete.

Damit wird sowohl dem Anfänger, als auch dem in der täglichen Praxis Stehenden, dieses Buch als wertvolle Hilfe dienen. H. FIEBER, Wien.

A History of the Theories of Aether and Electricity. The Modern Theories 1900—1926. Von SIR EDMUND WHITTAKER. XI, 319 S. London—Edinburgh—Paris—Melbourne—Toronto—New York: Th. Nelson and Sons Ltd. 1953. Geb. 32 s. 6 d. net.

Gerade die Theorie des Äthers und der Elektrizität haben im ersten Viertel unseres Jahrhunderts die Entwicklung der Physik maßgeblich beeinflusst. Eine Geschichte dieser Theorien trägt deshalb die Züge einer Geschichte der Physik. Der Leser verfolgt im vorliegenden Band das Entstehen der älteren Quantentheorie, der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie, der Matrizen- und der Wellenmechanik. Das Buch ist in neun Kapitel eingeteilt, die im wesentlichen der zeitlichen Aufeinanderfolge der einzelnen Theorien entsprechen, doch scheut sich der Autor nicht, auch Voraussetzungen, Ausblicke und Querverbindungen anzuführen, die nicht dem betrachteten Zeitabschnitt angehören. So wird der Inhalt eine glückliche Synthese zwischen Geschichtswerk und Lehrbuch. Sogar der über die Analysis hinausgehende mathematische Apparat, wie er als Vektor- und Tensorrechnung für die spezielle, als absoluter Differentialkalkül für die allgemeine Relativitätstheorie und als Matrizenrechnung für die Quantenmechanik notwendig ist, wird prägnant und verständlich bereitgestellt. Künstlerisch versteht es der Verfasser, durch eingehende Schilderung der experimentellen Gegebenheiten die großen, befreienden Ideen vorzubereiten, ohne daß dadurch die Leistung des Bahnbrechers geschmälert wird. So kommt z. B. das Ingenium POINCARÉs durch charakteristische Zitate zu seiner Würdigung. Denn dieser, den man hauptsächlich als Mathematiker ansah, zog die entscheidenden physikalischen Konsequenzen aus dem Versagen der Versuche, eine „absolute“ Bewegung festzustellen, während wiederum der Physiker LORENTZ das meiste zur mathematischen Formulierung beitrug, sich aber mit einigen weitreichenden Folgerungen bis zu seinem Tode nicht abfinden konnte. Aus dem Werk geht auch immer klar hervor, auf welchen Resultaten ihrer Vorgänger die einzelnen Forscher aufbauten, und wie sie Kenntnisse aus zunächst fernerliegend scheinenden Gebieten verwendeten. Beispiele dafür sind der ursprüngliche Weg PLANCKs zu seiner Strahlungsformel und BOHRs Theorie der Atomspektren. Das Buch gewinnt auch dadurch, daß der Verfasser immer wieder versucht, eine Tatsache von mehreren Seiten dem Verständnis näherzubringen. Kurz gefaßt ist das Kapitel über die Entdeckung der Matrizenmechanik, aber es bringt treffend zum Ausdruck, wie sich Arbeit an Arbeit reihte als einmal der entscheidende Gedanke gefaßt war.

Die Wellenmechanik wird bis zum Auftreten der Schwierigkeiten bei Betrachtung mehrerer Teilchen verfolgt. Auch der mit dem Elektronenspin verbundene Fragenkomplex ist in diesem Bande nicht mehr behandelt. Dagegen werden die Beziehungen zur klassischen Mechanik sehr ausführlich dargelegt, und auch die Vereinigung mit der Matrizenmechanik hergestellt, die mit der wellenmechanischen Ableitung der KRAMERS-HEISENBERGschen Dispersionsformel und der Erklärung des COMPTON-Effektes durch SCHRÖDINGER den Schluß des Buches bildet.

Es darf wohl gesagt werden, daß jeder, der die beiden erschienenen Bände mit Interesse zur Hand nahm, mit Spannung dem Erscheinen des dritten entgegen sieht, in dem der Autor sich die große Aufgabe stellt, den weiteren Ausbau der Theorien bis in die neueste Zeit zu schildern. H. STIPPEL, Graz.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. . . . kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satz-kosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Bei der Schriftleitung sind folgende Beiträge eingelangt:

(Änderungen in der Reihenfolge bei der Veröffentlichung müssen aus technischen Gründen vorbehalten bleiben.)

- | | | |
|---|-----|-----------|
| Haefer, R. Methoden zur Messung niedriger Gasdrucke mit Hilfe der selbständigen Gasentladung im transversalen Magnetfeld | 15. | I. 1954 |
| Harmuth, H. Über die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit elektronischen Rechenmaschinen | 21. | IV. 1954 |
| Krzywoblocki, M. Z. v. On Some Problems in Free Molecule-Slip Flow Regimes | 21. | VI. 1954 |
| Schneider, H. Die vollständige Deutung von Sondencharakteristiken für Plasmen mit mehreren Elektronengruppen | 10. | VII. 1954 |
| Székely A., Zur Verstärkerwirkung von Gastrioden | 10. | VII. 1954 |
| Székely, A. Eine neue Methode zur Erzeugung von Kipp-Schwingungen mit der Gastriode | 10. | VII. 1954 |
| Bertele, H. v., Erscheinungsbild und Wesen der Fleckemission auf Quecksilber-Oberflächen | 14. | IX. 1954 |
| Rohatschek, H. Zur Theorie der Magnetophotophorese | 18. | IX. 1954 |
| Higatsberger, M. J. Relative Häufigkeitsbestimmung von Li^7/Li^6 mit einem nach neuen Gesichtspunkten entwickelten 15° magnetischen Sektorfeld-Massenspektrometer | 28. | X. 1954 |

Methoden und Probleme der Wettervorhersage. Von Dr. **Heinz Reuter**, Privatdozent an der Universität Wien, Observator an der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien. Mit 46 Textabbildungen. VIII, 161 Seiten. 1954. Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, \$ 5.25, sfr. 22.60

In den letzten Jahren sind neue, wichtige Erkenntnisse über den Mechanismus der atmosphärischen Vorgänge errungen worden, die für die Methodik der Wettervorhersage große Bedeutung gewonnen haben. Die moderne Entwicklung in Europa und Amerika findet ihren sichtbaren Ausdruck nicht zuletzt in der Ableitung objektiver rechnerischer Methoden für die Konstruktion von Vorhersagekarten des Boden- und Höhendruckfeldes, wodurch die eigentliche Wettervorhersage eine verlässliche und objektive Grundlage gewinnt. Erstmalig bringt das Buch von *Reuter* eine zusammenfassende Darstellung dieser Methoden sowie der aktuellen Probleme der Wettervorhersage im allgemeinen. Der Verfasser hat sich bemüht, den nicht immer einfachen Stoff in einer Form zu bringen, die den Bedürfnissen des Wissenschaftlers und des Meteorologen im praktischen Wetterdienst gleichermaßen entgegenkommt.

Hydraulik. Ihre Grundlagen und praktische Anwendung. Von o. Prof. Dr. **Josef Kozeny**, Vorstand des Institutes für Hydraulik, Siedlungswasserwirtschaft, Verkehrswasserbau und landwirtschaftlichen Wasserbau, Technische Hochschule Wien. Mit 544 Textabbildungen. XI, 588 Seiten. 1953.

Ganzleinen S 528.—, DM 88.—, \$ 21.—, sfr. 90.—

„Das Werk entspricht den Erwartungen, welche die Fachwelt in die für sie schon seit langem zur Einheit gewordene Dualität *Kozeny*-Hydraulik gesetzt hat. Souveräne Beherrschung der theoretischen und naturwissenschaftlichen Grundlagen sowie die virtuose Eleganz bei der Anwendung des enormen, fast alle Gebiete der Mathematik benützenden Apparates geben dem Werk ein überragendes wissenschaftliches Gepräge. Sie stellen auch eine notwendige Bedingung dafür dar, die mannigfachen, teils sehr verwickelten Zusammenhänge zwischen den Modellen der Strömungsvorgänge (Sätze der Hydromechanik) und der Wirklichkeit (Fortbewegung des Wassers innerhalb von Bauwerken und in der Natur sowie die dadurch entstehenden Auswirkungen auf die Umgebung) in knapper Form und dabei doch klar aufzuzeigen, worin ja das wesentliche Ziel der Hydraulik zu erblicken ist...“

Österreichische Wasserwirtschaft

Zu beziehen durch jede Buchhandlung